JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Math - Econ

21740

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XV. — ANNÉE 1850.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1850

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XV.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
278,	10,	*au lieu de* $\int_{\pi}^{\varphi} \frac{\Delta(c, \varphi)}{\sin^2\varphi - \sin^2\lambda} d\varphi$ *lisez* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\Delta(c, \varphi)}{\sin^2\varphi - \sin^2\lambda} d\varphi$
285,	6,	*au lieu de* $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(\overline{a^2 - c^2} \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)}}$
		lisez $\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(\overline{a^2 - c^2} \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)}}$
288,	7,	*au lieu de* $\frac{\Theta(w + l)}{\Theta(w - l)}$ *lisez* $\frac{\Theta(w - l)}{\Theta(w + l)}$
291,	8 en remontant,	*au lieu de* $\pm$ *lisez* $\mp$

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme;

PAR M. J.-A. SERRET.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 2 juillet 1849.)

INTRODUCTION.

Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des équations algébriques, ont été conduits naturellement à étudier diverses questions relatives au nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme.

Lagrange est le premier qui soit entré dans cette voie, en démontrant que *le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur du produit* $1.2.3\ldots n$ [*].

Plus tard, Ruffini considéra particulièrement les fonctions de cinq lettres, et démontra, dans sa *Théorie des Equations*, qu'*une fonction de cinq lettres qui a moins de cinq valeurs ne peut en avoir plus de deux*.

Ce théorème fut étendu ensuite aux fonctions d'un nombre quel-

[*] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1770 et 1771.

conque de lettres, par Pietro Abatti, compatriote de Ruffini, qui démontra [*] qu'*une fonction d'un nombre quelconque de lettres ne peut avoir moins de cinq valeurs, si elle en a plus de deux.*

Tel était l'état de la question lorsque M. Cauchy vint à s'en occuper. Ce géomètre, prenant pour point de départ les travaux de Ruffini et d'Abatti, publia dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique* un Mémoire très-remarquable [**] où se trouve démontré ce beau théorème qui comprend ceux de Ruffini et d'Abatti :

Une fonction de n lettres qui a plus de deux valeurs en a au moins un nombre égal au plus grand nombre premier contenu dans n.

On conclut de là, si n est premier, que

Une fonction de n lettres qui a plus de deux valeurs en a au moins n.

M. Cauchy donne à penser qu'il chercha à étendre ce dernier théorème au cas des fonctions d'un nombre quelconque de lettres, mais il ne put y parvenir que pour les fonctions de six lettres. Il a, en effet, démontré dans son Mémoire, que

Si une fonction de six lettres a plus de deux valeurs, elle en a au moins six.

Enfin, M. Bertrand présenta, il y a trois ans, à l'Académie, un Mémoire qui fait aujourd'hui partie du XXX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et où il se proposait, comme objet principal, de démontrer généralement que

Si une fonction de n lettres a plus de deux valeurs, elle en a au moins n.

On sait que M. Bertrand est parvenu à établir ce théorème en faisant usage du postulatum suivant :

Si n est > 7, il y a au moins un nombre premier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n-2$.

Les Tables de nombres premiers ont permis de vérifier l'exactitude

[*] *Mémoires de la Société Italienne*, tome X.

[**] *Voyez* aussi mon *Cours d'Algèbre supérieure*, page 248.

de ce postulatum pour les valeurs de n comprises entre 7 et 6 000 000, en sorte que le théorème de M. Bertrand se trouve démontré par lui pour les fonctions qui ont moins de 6 000 000 de variables.

M. Bertrand a aussi démontré dans son Mémoire que, n étant > 9,

Si une fonction de n lettres a plus de n valeurs, elle en a au moins $2n$.

Tels sont les principaux faits acquis jusqu'à ce jour à cette théorie. Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie se compose de deux parties. Dans la première, je démontre, sans avoir recours à aucun postulatum : 1° qu'une fonction de n lettres qui a moins de n valeurs, n'en a que deux au plus, si n est > 4; 2° qu'une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs est symétrique par rapport à $n-1$ lettres, à moins que n ne soit égal à 6. Dans la seconde partie, je démontre : 1° qu'une fonction de n lettres qui a plus de n valeurs, en a au moins $2n$, si n est > 8; 2° qu'une fonction de n lettres qui a plus de $2n$ valeurs, en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, si n est > 12.

Ainsi, à part les cas d'exception que je signale, le nombre des valeurs que peut avoir une fonction de n lettres est 1, 2, n, $2n$ ou $\frac{n(n-1)}{2}$, ou un nombre supérieur.

La méthode dont je fais usage diffère essentiellement de celles qu'on a employées jusqu'ici. Je n'emprunte aux travaux antérieurs que les résultats relatifs à la forme des fonctions qui n'ont que deux valeurs. Je crois nécessaire de les rappeler dans cette introduction pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre.

Lemme I. *Si*

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

est une fonction de n lettres qui prend μ *valeurs distinctes*

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

quand on y permute les lettres a, b, etc., toute fonction symétrique de $V_1, V_2, \ldots, V_\mu$, *est également une fonction symétrique des lettres* $a, b, c, d, \ldots, k, l$.

Cette proposition est presque évidente. (*Voyez* mon *Cours d'Algèbre supérieure*, deuxième Leçon.)

LEMME II. *Si une fonction d'un nombre quelconque de lettres n'a que deux valeurs distinctes, elle change nécessairement de valeur par la transposition de deux lettres quelconques.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction d'un nombre quelconque de lettres qui n'a que deux valeurs. Prenons trois lettres quelconques a, b, c, et faisons les trois arrangements

$$a, b, c; \quad b, c, a; \quad c, a, b.$$

Il en résultera ces trois valeurs de la fonction V :

$$\begin{gathered}\varphi(a, b, c, \ldots),\\ \varphi(b, c, a, \ldots),\\ \varphi(c, a, b, \ldots).\end{gathered}$$

Mais comme, par hypothèse, la fonction V n'a que deux valeurs distinctes, parmi les trois qu'on vient d'écrire, il y en a au moins deux qui sont égales entre elles. Or je dis qu'elles sont égales toutes trois.

Supposons, en effet, qu'on ait

$$(1) \qquad \varphi(a, b, c, \ldots) = \varphi(b, c, a, \ldots);$$

comme cette égalité doit avoir lieu identiquement, on peut y remplacer les lettres a, b, c, respectivement par b, c, a; il vient alors

$$(2) \qquad \varphi(b, c, a, \ldots) = \varphi(c, a, b, \ldots),$$

et l'on voit que les trois valeurs de V que nous considérons sont égales entre elles.

Si, au lieu d'admettre l'égalité (1), on admet l'égalité (2), en y remplaçant a, b, c, respectivement par b, c, a, il vient

$$(3) \qquad \varphi(c, a, b, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots),$$

ce qui montre que les trois valeurs de V sont égales entre elles.

Enfin la même chose a lieu si l'on admet l'égalité (3), car en y échangeant a, b, c, respectivement en b, c, a, on retombe sur l'égalité (1).

Il résulte de là que la fonction V n'est pas changée quand on remplace les trois lettres a, b, c, respectivement par b, c, a.

Nous représenterons, pour abréger, par la notation (a, b) la *transposition* des lettres a et b, c'est-à-dire l'opération qui a pour but de changer ces deux lettres l'une avec l'autre. D'après ce qui précède, la fonction V ne change pas, si on lui applique successivement les deux transpositions (a, b), (a, c), car l'effet de ces deux transpositions revient au changement de a, b, c en b, c, a.

Supposons que la transposition (a, b) change V en V_1 (V_1 pouvant être égal à V), la transposition (a, c) devra changer V_1 en V, et, par conséquent, V en V_1; car faire deux fois de suite une même transposition, c'est ne faire aucun changement. Donc deux transpositions (a, b), (a, c) qui ont une lettre commune produisent sur la fonction V le même changement. Il en est de même des transpositions (a, c), (c, d) qui ont la lettre c commune, et, par suite aussi, des deux transpositions (a, b), (c, d) qui n'ont aucune lettre commune. Mais la fonction V n'étant pas symétrique par hypothèse, il y a au moins une transposition qui change sa valeur; donc toutes les transpositions devront la changer en vertu de ce qui précède.

Forme générale des fonctions qui n'ont que deux valeurs.

On peut, quel que soit n, former des fonctions de n lettres qui n'aient que deux valeurs distinctes.

Soient, en effet, n lettres,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l,$$

et désignons par v le produit de toutes les différences obtenues, en retranchant de chacune de ces lettres successivement chacune des suivantes, en sorte qu'on ait

$$v = (a-b)(a-c)\ldots(a-l)(b-c)\ldots(k-l).$$

Le carré de v est évidemment une fonction symétrique, et, par suite,

v ne peut avoir que deux valeurs égales et de signes contraires. De plus, ces deux valeurs existent effectivement, car il est évident que v se change en $-v$ par la transposition des lettres a et b.

Soient maintenant A et B deux fonctions symétriques des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$. La fonction

$$A + Bv,$$

plus générale que v, n'a évidemment que les deux valeurs distinctes $A + Bv$ et $A - Bv$. Or je dis que toute fonction de n lettres qui n'a que deux valeurs, a la forme $A + Bv$.

Soit, en effet, V une fonction de n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$ qui n'a que deux valeurs distinctes, et désignons par V_1 et V_2 ces deux valeurs. Il est évident que la fonction $V_1 v$ n'a aussi que deux valeurs, car, d'après le lemme II, toute transposition change V_1 en V_2, V_2 en V_1, et v en $-v$; d'où il suit que la fonction $V_1 v$ n'a que ces deux valeurs

$$V_1 v \quad \text{et} \quad -V_2 v.$$

Donc, d'après le lemme I, si l'on fait

$$V_1 + V_2 = A,$$
$$V_1 v - V_2 v = B,$$

A et B seront des fonctions symétriques. Des équations précédentes on tire

$$V_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2v} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2v^2} v;$$

or $\frac{A}{2}$ et $\frac{B}{2v^2}$ étant des fonctions symétriques, on peut écrire plus simplement

$$V_1 = A + Bv,$$

A et B désignant des fonctions symétriques, et v la valeur écrite plus haut.

La proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPOSITION I.

LEMME.

Soient

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

μ fonctions de n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$: si les coefficients de l'équation

$$(1) \qquad (x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0,$$

ordonnée par rapport aux puissances de x, sont des fonctions symétriques des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$, la fonction V_1 ne pourra acquérir par les permutations de ces n lettres que des valeurs faisant partie de la série

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu.$$

En effet, faisons subir aux lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$ une permutation quelconque, l'équation (1) ne changera pas, puisque ses coefficients sont des fonctions symétriques; donc ses racines ne changeront pas non plus.

Ainsi, en faisant une permutation quelconque, les fonctions

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu$$

sont invariables, ou se changent les unes dans les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

THÉORÈME [*].

Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est nécessairement un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$.

---

[*] Ce théorème est bien connu et se présente pour ainsi dire de lui-même. Si nous en parlons ici, c'est moins pour en donner une démonstration nouvelle que pour dispenser le lecteur d'avoir recours aux travaux antérieurs.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, qui a μ valeurs distinctes

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu.$$

Formons l'équation du degré μ

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0,$$

que nous représenterons aussi par

$$\Psi(x) = 0,$$

$\Psi(x)$ étant, d'après le lemme I de l'introduction, un polynôme en x dont les coefficients sont des fonctions symétriques des n lettres a, $b, c, d, \ldots, k, l$.

Soit aussi, pour abréger,

$$1.2.3\ldots n = N.$$

Formons les N permutations des lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, et remplaçons les lettres de V successivement par celles de chacune de ces permutations; on aura N valeurs de V, que nous représenterons par

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_N,$$

et si l'on désigne par

$$F(x) = 0$$

l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_N) = 0,$$

il est évident que les coefficients de $F(x)$ sont des fonctions symétriques des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$.

Maintenant $F(x)$ est divisible par $\Psi(x)$; soit ρ la plus haute puissance de $\Psi(x)$ qui divise $F(x)$, et posons

$$F(x) = [\Psi(x)]^\rho \Psi_1(x),$$

je dis que $\Psi_1(x)$ ne peut dépendre de x, et qu'elle est, par suite, égale à 1. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu; $\Psi_1(x)$ est une fonction symétrique de $a, b, c, d, \ldots, k, l$, d'après l'équation précé-

dente; donc, d'après la proposition I, V ne peut avoir d'autres valeurs que celles qui sont racines de l'équation

$$\Psi_1(x) = 0.$$

Mais cela est impossible, car cette équation n'a pas les μ racines V_1, $V_2, \ldots, V_\mu$; puisque alors $F(x)$ serait divisible par une puissance de $\Psi(x)$ supérieure à la $\rho^{ième}$.

On ne peut donc supposer que $\Psi_1(x)$ soit fonction de x: cette quantité sera dès lors égale à 1, et l'on aura

$$F(x) = [\Psi(x)]^\rho,$$

et, par conséquent,

$$N = \mu\rho.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION III.

LEMME.

Si une fonction de n lettres a $\mu + \nu$ valeurs, et qu'elle ne prenne que μ valeurs distinctes par les permutations de m lettres, il y aura aussi m lettres parmi les n que contient la fonction, dont les permutations lui feront acquérir un nombre de valeurs distinctes égal ou inférieur à ν.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant $\mu + \nu$ valeurs, et supposons que par les permutations des m lettres

$$g, \quad h, \ldots, \quad k, \quad l,$$

la fonction V ne prenne que les μ valeurs

$$V_1, \quad V_2, \ldots \quad V_\mu.$$

Soient aussi

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}$$

les ν autres valeurs dont V est susceptible.

Les coefficients de l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_{\mu+\nu}) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des n lettres a, b, c, $d, \ldots$, k, l; pareillement les coefficients de l'équation

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des m lettres g, $h, \ldots$, k, l; donc l'équation qu'on obtient en divisant les deux précédentes, savoir

$$(x - V_{\mu+1})(x - V_{\mu+2})(x - V_{\mu+\nu}) = 0,$$

a aussi pour coefficients des fonctions symétriques de g, $h, \ldots$, k, l. Par conséquent, d'après la proposition I, la fonction $V_{\mu+1}$ ne peut acquérir, par les permutations des lettres g, $h, \ldots$, k, l, de valeurs différentes des ν suivantes

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}.$$

Donc enfin, parmi les n lettres qui entrent dans la fonction V, il y en a m dont les permutations font acquérir à cette fonction un nombre de valeurs distinctes égal ou inférieur à ν.

Corollaire. *En particulier, si une fonction de n lettres a μ valeurs distinctes, dont $\mu - 1$ seulement peuvent être obtenues par les permutations de m lettres, la fonction est symétrique par rapport à m lettres.*

PROPOSITION IV.

LEMME.

Si une fonction non symétrique de n lettres, n étant > 4, est symétrique par rapport à $n - 2$ de ces lettres, le nombre des valeurs distinctes de la fonction est n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, symétrique par rapport aux $n - 2$ lettres

$$c, \ d, \ldots, \ k, \ l.$$

1°. Si cette fonction ne change pas de valeur par la transposition de l'une des lettres a et b, b par exemple, avec l'une des $n - 2$

autres, elle sera symétrique par rapport aux $n-1$ lettres

$$b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l;$$

et comme, par hypothèse, elle n'est pas symétrique par rapport aux n lettres, elle aura précisément n valeurs.

2°. Supposons que la fonction V change par la transposition de l'une quelconque des deux lettres a et b avec l'une des $n-2$ autres, et qu'elle ne soit pas symétrique par rapport aux deux lettres a et b.

On formera évidemment toutes les valeurs dont la fonction V est susceptible, en faisant les $n(n-1)$ arrangements deux à deux des n lettres

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l,$$

et permutant dans la valeur de V les deux lettres a et b successivement avec les deux lettres de chacun de ces arrangements. Or je dis que toutes les valeurs de V formées ainsi sont différentes.

En effet, les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrangements formés des mêmes lettres, a, b et b, a par exemple, ne peuvent être égales, puisque l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)$$

exige que la fonction V soit symétrique par rapport à a et b, ce qui est contre l'hypothèse.

Pareillement, les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrangements ayant une lettre commune, tels que a, b et a, c, ou a, b et c, a, sont différentes. En d'autres termes, on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(a, c, b, d,\ldots, k, l),$$

ni

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(c, a, b, d,\ldots, k, l).$$

L'impossibilité de ces égalités résulte de ce que le premier membre de chacune d'elles est symétrique par rapport aux deux lettres c et d, tandis que le second ne l'est pas par hypothèse.

Enfin les deux valeurs de V qui correspondent à deux arrange-

ments a, b et c, d qui n'ont aucune lettre commune, sont aussi différentes; on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(c, d, a, b,\ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport à c et d, tandis que le second ne l'est pas.

On voit donc que le nombre des valeurs distinctes de V est $n(n-1)$.

3°. Supposons, enfin, que la fonction V change par la transposition de l'une quelconque des lettres a et b avec l'une des $n-2$ autres, mais qu'elle soit symétrique par rapport aux deux lettres a et b.

Dans ce cas, on formera toutes les valeurs de V en faisant les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des n lettres

$$a, b, c, d,\ldots, k, l,$$

et permutant dans la valeur de V les deux lettres a et b successivement avec les deux lettres de chacune de ces combinaisons. Or je dis que toutes les valeurs de V ainsi formées seront différentes si n est supérieur à 4.

En effet, deux valeurs de V qui correspondent à deux combinaisons a, b et a, c, qui ont une lettre commune, sont différentes; on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(a, c, b, d,\ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport à a et b, et que le second ne l'est pas par hypothèse.

Pareillement, deux valeurs de V qui correspondent à deux combinaisons a, b et c, d, qui n'ont aucune lettre commune, sont aussi différentes; en d'autres termes, on ne peut avoir

$$\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l) = \varphi(c, d, a, b,\ldots, k, l),$$

parce que le premier membre est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres c, d,..., k, l, et que le second ne l'est pas par hypothèse si n est > 4.

On voit donc que le nombre des valeurs distinctes de V est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque. La démonstration de ce dernier cas suppose essentiellement $n > 4$; car si l'on a $n = 4$, on ne peut plus dire que l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d) = \varphi(c, d, a, b)$$

soit impossible. Cette égalité peut, au contraire, avoir lieu; cela arrive en particulier pour la fonction

$$ab + cd,$$

et pour une infinité d'autres.

COROLLAIRE. *Si une fonction de n lettres symétrique par rapport à $n - 2$ lettres a n valeurs, elle doit être symétrique par rapport à $n - 1$ lettres.*

PROPOSITION V.

LEMME.

Si une fonction de n lettres n'a que deux valeurs par les permutations de $n - 1$ lettres, elle a 2 ou $2n$ valeurs par les permutations de toutes les lettres, n étant > 3.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 3, qui n'a que deux valeurs par les permutations des $n - 1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l;$$

en désignant par v le produit des différences de ces $n - 1$ lettres deux à deux, en sorte qu'on ait

$$v = (b - c)(b - d)\ldots(k - l),$$

V aura la forme

$$V = A + Bv,$$

A et B étant des fonctions des n lettres a, b, c, etc., symétriques par rapport aux $n - 1$ dernières.

Cela posé, je distinguerai deux cas suivant que la fonction A est symétrique ou non symétrique par rapport aux n lettres.

1°. Si A est symétrique par rapport aux n lettres, V a précisément autant de valeurs que Bv; mais le carré de Bv est symétrique par rapport aux $n-1$ lettres $b, c, d, \ldots, k, l$, donc il a n valeurs, ou une seulement s'il est symétrique par rapport à toutes les lettres. Par conséquent, Bv ou V a 2 ou $2n$ valeurs.

2°. Si A n'est symétrique que par rapport aux $n-1$ lettres $b, c, d, \ldots, k, l$, faisons les n transpositions

$$(a, a),\quad (a, b),\quad (a, c), \ldots,\quad (a, l),$$

et désignons par

$$A_1,\quad A_2, \ldots,\quad A_n$$

les valeurs qui en résultent pour A; par

$$B_1,\quad B_2, \ldots,\quad B_n$$

les valeurs correspondantes de B qui peuvent être égales entre elles, et par

$$v_1,\quad v_2, \ldots,\quad v_n$$

celles de v. On aura ces $2n$ valeurs de V, les seules que cette fonction puisse avoir,

$$\begin{array}{c} A_1 \pm B_1 v_1, \\ A_2 \pm B_2 v_2, \\ \cdots\cdots \\ A_n \pm B_n v_n; \end{array}$$

et je dis que ces $2n$ valeurs de V sont différentes si n est > 3. En effet, si l'on avait, par exemple,

$$A_1 \pm B_1 v_1 = A_2 \pm B_2 v_2,$$

il en résulterait

$$A_1 - A_2 = \pm B_2 v_2 \mp B_1 v_1;$$

or le premier membre n'est pas nul, et il est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$; B_1 et B_2 sont également symétriques par

rapport à ces lettres, tandis que v_1 et v_2 changent de signe par la transposition de deux quelconques de ces $n-2$ lettres; l'égalité précédente est donc impossible si $n-2$ est au moins égal à 2, c'est-à-dire si n est > 3.

La fonction V a donc $2n$ valeurs.

Corollaire. *Si une fonction de n lettres, n étant > 4, a deux valeurs seulement par les permutations de $n-2$ lettres, le nombre des valeurs que cette fonction peut prendre par les permutations de toutes les lettres est égal à 2, ou supérieur à n.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 4, qui n'a que deux valeurs par les permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

D'après la proposition qui précède, comme on suppose $n-1 > 3$, la fonction V aura 2 ou $2(n-1)$ valeurs par les permutations des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Dans le dernier cas, le nombre total des valeurs de V est supérieur à n. Si, au contraire, la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

elle en aura 2 ou $2n$ par les permutations de toutes les lettres.

Le corollaire est donc démontré.

PROPOSITION VI.

LEMME.

Si une fonction de n lettres, non symétrique, a un nombre impair de valeurs distinctes, il est impossible qu'elle prenne toutes les valeurs dont elle est susceptible, par les seules permutations de $n-2$ lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant un nombre impair μ de valeurs distinctes, et supposons qu'elle puisse prendre ses μ valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Représentons ces μ valeurs par

$$(1) \qquad \varphi_1(a, b, \ldots), \quad \varphi_2(a, b, \ldots), \ldots, \quad \varphi_\mu(a, b, \ldots).$$

Il est d'abord évident que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, car toutes les valeurs qu'elle peut prendre seraient symétriques par rapport à a et b, et, par conséquent, cette fonction serait symétrique par rapport à deux lettres quelconques, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela étant, faisons dans les fonctions (1) la transposition (a, b), elles deviennent

$$(2) \qquad \varphi_1(b, a, \ldots), \quad \varphi_2(b, a, \ldots), \ldots, \quad \varphi_\mu(b, a, \ldots).$$

Les fonctions (1) étant distinctes par hypothèse, les fonctions (2) le sont aussi, et comme la série (1) comprend toutes les valeurs de V, les fonctions (2) ne différeront pas des fonctions (1); d'ailleurs les termes de même rang de ces suites ne peuvent être égaux, puisque la fonction V n'est pas symétrique par rapport à a et b. Supposons donc que l'on ait

$$\varphi_1(a, b, \ldots) = \varphi_\mu(b, a, \ldots),$$

en changeant a et b l'une avec l'autre, il vient

$$\varphi_1(b, a, \ldots) = \varphi_\mu(a, b, \ldots);$$

d'où il suit que les termes de la suite (1) peuvent être groupés deux à deux, de manière que les deux termes d'un même groupe se changent l'un dans l'autre, par la transposition (a, b). Or cela est impossible, puisque μ est un nombre impair. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION VII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

prend toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c,\ d, \ldots,\ k,\ l,$$

le nombre de ces valeurs est double du nombre de valeurs que prend la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)],$$

par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

On voit, comme dans la proposition précédente, que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, et que les valeurs de V peuvent être groupées deux à deux, de manière que les termes d'un même groupe se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b). Il résulte de là que les valeurs de V peuvent être partagées en deux séries de la manière suivante

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(a, b), & \varphi_2(a, b), \ldots, & \varphi_\mu(a, b), \\ \varphi_1(b, a), & \varphi_2(b, a), \ldots, & \varphi_\mu(b, a). \end{array}$$

Cela posé, la fonction X ne peut acquérir que les μ valeurs suivantes, par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$,

$$\begin{array}{l} [x - \varphi_1(a, b)][x - \varphi_1(b, a)], \\ [x - \varphi_2(a, b)][x - \varphi_2(b, a)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [x - \varphi_\mu(a, b)][x - \varphi_\mu(b, a)], \end{array}$$

car toute permutation des lettres $c, d, \ldots, k, l$ qui laisse $\varphi_1(a, b)$ invariable, ou qui la change en $\varphi_1(b, a)$, laisse invariable $\varphi_1(b, a)$ ou la

change en $\varphi_1(a, b)$; et de même toute permutation des lettres c, $d, \ldots, k, l$ qui change $\varphi_1(a, b)$ en $\varphi_2(a, b)$ ou en $\varphi_2(b, a)$, change aussi $\varphi_1(b, a)$ en $\varphi_2(b, a)$ ou en $\varphi_2(a, b)$.

De plus, les μ valeurs de X, écrites plus haut, sont différentes, car s'il n'y en avait que μ' de distinctes, μ' étant $< \mu$, en multipliant ces μ' valeurs et égalant à zéro le produit, on aurait une équation dont le premier membre serait une fonction symétrique des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et dont les $2\mu'$ racines seraient les seules valeurs distinctes de la fonction V (proposition I), ce qui est impossible, puisqu'on a supposé ce nombre de valeurs égal à 2μ.

Il est donc démontré que le nombre des valeurs de la fonction V est double du nombre des valeurs que peut prendre la fonction X par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

PROPOSITION VIII.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a moins de n valeurs distinctes, ne peut en avoir plus de deux.

Je vais démontrer généralement que si le théorème a lieu pour les fonctions de $n-2$ lettres, il a lieu aussi pour les fonctions de n lettres; et comme il est évidemment vrai pour les fonctions de trois lettres, il sera vrai aussi pour les fonctions de cinq, de sept, etc., d'un nombre impair quelconque de lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui a moins de n valeurs distinctes, n étant un nombre impair au moins égal à 5.

Soient a et b deux lettres quelconques, et faisons toutes les permutations des $n-2$ autres lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

sans changer la place ni de a ni de b; comme nous admettons qu'une fonction de $n-2$ lettres qui a moins de $n-2$ valeurs, ne peut en

avoir plus de deux, le nombre des valeurs de V résultant des permutations des $n-2$ lettres c, d,..., k, l sera nécessairement l'un des quatre suivants

$$1,\quad 2,\quad n-2,\quad n-1.$$

Nous allons faire successivement ces quatre hypotheses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors elle aura, d'après la proposition IV, n ou $\frac{n(n-1)}{2}$, ou $n(n-1)$ valeurs distinctes. Cette hypothèse n'est donc pas admissible puisque V a moins de n valeurs.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après le corollaire de la proposition V, la fonction V n'a en tout que deux valeurs, puisqu'elle en a moins de n.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition VI, il est impossible que la fonction V n'ait que $n-2$ valeurs par les permutations des n lettres, parce que $n-2$ est un nombre impair; elle en a donc $n-1$. Mais alors, d'après la proposition III (corollaire), la fonction V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et, par conséquent, elle a n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$ valeurs. Cette hypothèse est donc inadmissible.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Comme la fonction V n'a en tout que $n-1$ valeurs, d'après la proposition VII, la fonction

$$X=[x-\varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)][x-\varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)]$$

a $\frac{n-1}{2}$ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres c, d,..., k, l. Mais on a

$$\frac{n-1}{2}<n-2,$$

et nous admettons qu'une fonction de $n-2$ lettres qui a moins de $n-2$ valeurs, n'en a au plus que deux, donc la fonction X a une ou deux valeurs seulement, et, par conséquent, on doit avoir

$$\frac{n-1}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad = 2,$$

c'est-à-dire

$$n = 3 \quad \text{ou} \quad n = 5.$$

Nous avons supposé $n > 3$, donc l'hypothèse que nous discutons en ce moment est inadmissible, à moins que n ne soit égal à 5. Mais elle l'est encore dans ce cas, car une fonction de cinq lettres ne peut avoir quatre valeurs par les permutations de trois lettres, à cause que 4 n'est pas un diviseur du produit 1.2.3.

Conclusion. On voit que la seconde de nos quatre hypothèses est seule admissible, et, par conséquent, si la fonction V a moins de n valeurs, elle ne peut en avoir plus de deux.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a précisément n valeurs, est symétrique par rapport à n − 1 lettres.

La démonstration suivante suppose n au moins égal à 5, mais pour les fonctions de trois lettres, le théorème est presque évident [*].

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

---

[*] Soit

$$V = \varphi(a, b, c)$$

une fonction de trois lettres qui a trois valeurs. Si V n'est pas symétrique par rapport aux deux lettres a et b, soient V_1 et V_2 les deux valeurs que prend cette fonction par les permutations de ces lettres, et V_3 la troisième valeur de V; on a

$$V_3 = (V_1 + V_2 + V_3) - (V_1 + V_2),$$

d'où il résulte que V_3 est symétrique par rapport à a et b. Donc V est symétrique par rapport à deux lettres.

une fonction d'un nombre impair n de lettres, qui a précisément n valeurs.

Soient a et b deux lettres quelconques, et faisons toutes les permutations des $n-2$ autres lettres

$$c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l;$$

il en résultera pour V un nombre de valeurs qui sera l'un des suivants

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad (n-2),\quad (n-1),\quad n.$$

Mais, d'après la proposition VIII, $n-2$ étant impair, si ce nombre de valeurs est inférieur à $n-2$, il est au plus égal à 2, ce sera donc l'un des cinq nombres

$$1,\quad 2,\quad n-2,\quad n-1,\quad n.$$

Nous allons faire ces cinq hypothèses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition IV, le nombre des valeurs de V ne peut être égal à n que si cette fonction est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après le corollaire de la proposition V.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition III, la fonction V ayant en tout n valeurs et n'en ayant que $n-2$ par les permutations de $n-2$ lettres, a une ou deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres. Par conséquent, le nombre de ses valeurs ne peut être égal à n, que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition III, la fonction V est symétrique

par rapport à $n-2$ lettres, et, par conséquent, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres, d'après la proposition IV.

5°. *La fonction* V *prend ses* n *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d, \ldots k, l$.

Cela est impossible, d'apres la proposition VI, parce que n est un nombre impair.

Conclusion. La premiere, la troisième et la quatrième hypothèses sont, comme on voit, seules admissibles, et quelle que soit celle qui a lieu, la fonction V est nécessairement symétrique par rapport à $n-1$ lettres; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

Une fonction d'un nombre pair n de lettres qui a moins de n valeurs ne peut en avoir plus de deux, si n est supérieur à 4.

Ce théorème n'a pas lieu pour les fonctions de quatre lettres; et c'est précisément parce qu'on peut former des fonctions de quatre lettres qui n'ont que trois valeurs, qu'on peut résoudre l'équation générale du quatrième degré.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction d'un nombre n de lettres pair et supérieur à 4, et supposons que cette fonction ait moins de n valeurs.

Si l'on considère V comme fonction des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

et qu'on permute ces lettres, on obtiendra un nombre de valeurs distinctes de V, qui, étant par hypothèse inférieur à n, sera l'un des suivants

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad n-2, \quad n-1.$$

Mais, d'après la proposition VIII, comme $n-1$ est impair, ce nombre

de valeurs ne peut s'abaisser au-dessous de $n-1$, sans être égal à 2 ou à 1; donc le nombre des valeurs distinctes de V résultant des permutations des $n-1$ lettres $b, c, d, \ldots, k, l$ est l'un des trois suivants

$$1,\quad 2,\quad n-1.$$

Examinons ces trois cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Alors, elle a évidemment n valeurs, ce qui est contre l'hypothese; à moins qu'elle ne soit symétrique par rapport à toutes les lettres, et, dans ce cas, elle n'a qu'une seule valeur.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition V, la fonction V a 2 ou $2n$ valeurs.

3°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-1$ *lettres* $b, c, d, \ldots, k, l$.

Dans ce cas, comme $n-1$ est impair, la fonction V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, d'après la proposion IX, et alors, d'après la proposition IV, elle a au moins n valeurs.

Conclusion. Puisqu'on suppose que V a moins de n valeurs, et que cette fonction n'est pas symétrique, le second des trois cas précédents est seul possible, et alors la fonction V a deux valeurs seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre n *de lettres pair et supérieur à* 6 *a* n *valeurs, elle est symétrique par rapport à* $n-1$ *lettres.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs. On suppose n pair et supérieur à 6.

Soient a et b deux lettres quelconques, et permutons les $n-2$ autres lettres

$$c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Le nombre des valeurs qu'on obtiendra ainsi pour V ne pouvant, d'après la proposition X, être à la fois plus grand que 2 et moindre que $n-2$ (puisque, par hypothèse, $n-2$ est >4), sera l'un des cinq suivants

$$1,\quad 2,\quad n-2,\quad n-1,\quad n.$$

Nous allons faire ces cinq hypothèses.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Alors, d'après la proposition IV, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après le corollaire de la proposition V, car alors la fonction V n'aurait, en tout, que deux valeurs, ou elle en aurait plus de n.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$

Alors la fonction V ayant en tout n valeurs, elle a une ou deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres (proposition III), et, par conséquent, elle ne peut en avoir n en tout que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

4°. *La fonction* V *a* $n-1$ *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Dans ce cas, d'après la proposition III, V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et, par conséquent, elle ne peut avoir n valeurs que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

5°. *La fonction* V *a* n *valeurs par les permutations des* $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$.

Cela est impossible d'après la proposition VII, car alors la fonction

$$[x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)]$$

aurait, par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, un nombre de valeurs égal à $\frac{n}{2}$, ce qui ne peut être, puisque $\frac{n}{2}$ est $< n-2$, et > 2.

Conclusion. Le premier, le troisième et le quatrième cas sont seuls possibles, et l'on voit que la fonction V ne peut avoir n valeurs, que si elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

Remarque. La démonstration ne s'applique pas aux fonctions de six lettres, pour lesquelles le théorème n'a pas lieu.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPOSITION XII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres est symétrique par rapport à $n-3$ lettres, mais qu'elle ne le soit pas par rapport à $n-2$ lettres, le nombre des valeurs de la fonction n étant > 6, est

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \quad \textit{ou} \quad n(n-1)(n-2).$$

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l).$$

une fonction de n lettres, n étant > 6, symétrique par rapport aux $n-3$ lettres

$$d, \ldots, \quad k, \quad l,$$

mais qui ne soit pas symétrique par rapport à $n-2$ lettres.

Le nombre des valeurs que la fonction V peut acquérir par les permutations des trois lettres a, b, c, devant diviser le produit 1.2.3, est l'un des quatre nombres 1, 2, 3 ou 6. Nous allons examiner ces quatre cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux trois lettres* a, b, c.

On aura toutes les valeurs de la fonction V en formant les $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ combinaisons trois à trois des n lettres $a, b, c, d,\ldots, k, l$, et permutant dans V les trois lettres a, b, c avec les trois lettres de chacune de ces combinaisons. Or je dis que toutes les valeurs de V ainsi formées sont différentes si n est > 6. Il suffit, pour le prouver, d'établir l'impossibilité des égalités

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g,\ldots, k, l) = \varphi(d, b, c, a, e, f, g,\ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g,\ldots, k, l) = \varphi(d, e, c, a, b, f, g,\ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g,\ldots, k, l) = \varphi(d, e, f, a, b, c, g,\ldots, k, l).$$

Cette impossibilité résulte de ce que les seconds membres sont symétriques par rapport aux lettres a et g, tandis que les premiers membres ne le sont pas. La fonction V a donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ valeurs.

On voit qu'il est nécessaire pour la démonstration que la fonction V renferme sept lettres au moins.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des trois lettres* a, b, c.

Si l'on pose

$$v = (a-b)(a-c)(b-c),$$

la fonction V aura la forme

$$V = A + Bv,$$

A et B étant des fonctions symétriques de a, b, c. En outre, comme V ou $A + Bv$ est une fonction symétrique des $n-3$ lettres $d,\ldots, k, l$, et que cette fonction se change en $A - Bv$ par la transposition de deux des trois lettres a, b, c, on voit que A et B sont nécessairement des fonctions symétriques de $d,\ldots, k, l$. On obtiendra toutes les valeurs de V en faisant les combinaisons trois à trois des n lettres $a, b, c, d,\ldots, k, l$, et remplaçant dans la fonction

$$A \pm Bv,$$

les lettres a, b, c successivement par les lettres de chaque combinaison trois à trois. Le nombre des valeurs ainsi formées est $2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ ou $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$. Il n'y a plus qu'à montrer que ces valeurs sont différentes.

Représentons simplement par

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l)$$

l'une ou l'autre des valeurs $A \pm Bv$; on prouvera, comme précédemment, que les égalités

$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, b, c, a, e, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, c, a, b, f, g, \ldots, k, l),$$
$$\varphi(a, b, c, d, e, f, g, \ldots, k, l) = \varphi(d, e, f, a, b, c, g, \ldots, k, l),$$

sont impossibles, parce que le second membre de chacune d'elles est symétrique par rapport à a et g, et que le premier ne l'est pas par hypothèse.

La fonction V a donc effectivement $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ valeurs distinctes.

3°. *La fonction* V *a trois valeurs par les permutations des lettres* a, b, c.

Dans ce cas, elle est symétrique par rapport à deux des trois lettres a, b, c. Supposons que ce soient b et c. Il est évident qu'on obtiendra toutes les valeurs de V en formant les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des n lettres $a, b, c, \ldots, k, l$, écrivant ensuite devant chacune de ces combinaisons, successivement chacune des $n-2$ lettres qui n'y entrent pas, et permutant enfin les trois lettres a, b, c de la fonction V, avec les trois lettres qui composent chacun des arrangements ainsi formés.

Le nombre des valeurs de la fonction V est alors $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

4°. *La fonction* V *a six valeurs par les permutations des lettres* a, b, c.

Dans ce cas, la fonction V change par une permutation quelconque des trois lettres a, b, c. On voit alors aisément qu'elle a autant de valeurs qu'on peut faire d'arrangements de n lettres trois à trois, c'est-à-dire $n(n-1)(n-2)$.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIII.

LEMME.

Si une fonction de n lettres, n étant > 5, a deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, le nombre total des valeurs qu'elle peut prendre par les permutations de toutes les lettres est 2, $2n$, $n(n-1)$ ou $2n(n-1)$

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres qui n'a que deux valeurs

$$V_1, \quad V_2,$$

par les permutations des $n-2$ lettres c, d,..., k, l.

La fonction

$$(x - V_1)(x - V_2),$$

où x désigne une variable indéterminée, est symétrique par rapport aux $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et si elle l'est aussi par rapport à toutes les lettres, la fonction V n'a que les deux seules valeurs V_1 et V_2, d'après la proposition I.

Si la fonction

$$(x - V_1)(x - V_2)$$

n'est pas symétrique par rapport aux n lettres a, b,..., k, l, le nombre de ses valeurs sera, d'après la proposition IV, n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$. Désignons-le par μ, et soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - V_1^1)(x - V_2^1), \\ (x - V_1^2)(x - V_2^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x - V_1^{\mu})(x - V_2^{\mu}), \end{array} \right.$$

ces μ valeurs elles-mêmes. Voilà μ produits qui sont, par hypothèse, différents; je dis de plus que deux d'entre eux ne sauraient avoir un facteur commun. En effet, supposons, s'il est possible, que les deux premiers des produits (1) aient un facteur commun, que l'on ait, par exemple,

$$(2) \qquad \mathrm{V}_1^1 = \mathrm{V}_1^2 \quad \text{ou} \quad = \mathrm{V}_2^2.$$

Les deux fonctions V_1^1 et V_1^2 ont chacune deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, et comme on suppose $n > 5$, parmi les $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir deux valeurs à V_1^1, il y en a au moins deux qui font partie des $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir deux valeurs à V_1^2. Si l'on transpose les deux lettres dont nous parlons, les fonctions V_1^1 et V_2^1, V_1^2 et V_2^2 se changeront l'une dans l'autre (introduction); par conséquent, l'égalité (2) conduit à celle-ci

$$\mathrm{V}_2^1 = \mathrm{V}_2^2 \quad \text{ou} \quad = \mathrm{V}_1^2,$$

ce qui est impossible, car autrement les deux premiers des produits (1) seraient identiques, ce qui est contre l'hypothèse.

Maintenant le produit des fonctions (1) est une fonction symétrique des n lettres $a, b, c, d,\ldots, k, l$; de plus, tous les facteurs linéaires de ce produit sont différents; donc, d'après la proposition I, la fonction V a les valeurs distinctes

$$\mathrm{V}_1^1, \quad \mathrm{V}_2^1, \quad \mathrm{V}_1^2, \quad \mathrm{V}_2^2,\ldots, \quad \mathrm{V}_1^\mu, \quad \mathrm{V}_2^\mu,$$

dont le nombre 2μ est égal à $2n$ ou à $n(n-1)$, ou à $2n(n-1)$.

La proposition est donc démontrée.

Corollaire I. *Si la fonction* V *a* $2n$ *valeurs, on a* $\mu = n$, *et, par conséquent* (proposition IV), *la fonction*

$$(x - \mathrm{V}_1)(x - \mathrm{V}_2),$$

déjà symétrique par rapport aux $n-2$ *lettres* $c, d,\ldots, k, l$, *l'est par rapport à* $n-1$ *lettres. Donc, d'après la proposition* I, V, *considérée comme fonction de ces* $n-1$ *lettres, n'a que les deux valeurs* V_1 *et* V_2.

Corollaire II. *Si une fonction de* n *lettres n'a que deux valeurs*

par les permutations de $n - 3$ lettres, et qu'elle ait en tout plus de $2n$ valeurs, elle en a aussi plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, si $n > 6$.

Supposons que la fonction

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l),$$

ait deux valeurs par les permutations des $n - 3$ lettres $d, e, \ldots, k, l$. D'après le lemme précédent, en considérant V comme fonction des $n - 1$ lettres $b, c, d, e, \ldots, k, l$, le nombre de ses valeurs sera

$$2, \quad 2(n-1), \quad (n-1)(n-2), \quad \text{ou} \quad 2(n-1)(n-2).$$

Si la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations de $b, c, d, \ldots, k, l$, elle en a 2 ou $2n$ par les permutations de toutes les lettres (proposition V).

Si la fonction V a $2(n-1)$ valeurs par les permutations de $b, c, d, \ldots, k, l$, elle n'a que deux valeurs par les permutations de $n - 2$ de ces $n - 1$ lettres, d'après le corollaire I qui précède, et, par conséquent, elle en a 2 ou $2n$, ou $n(n-1)$, ou $2n(n-1)$ par les permutations des n lettres.

Donc, puisqu'on suppose que la fonction V a plus de $2n$ valeurs, elle en a au moins $(n-1)(n-2)$, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, à cause de $n > 6$.

Remarque. Par un raisonnement tout semblable à celui qui nous a servi à démontrer le lemme qui précède, on pourrait déterminer exactement le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres qui a deux valeurs par les permutations de $n - 3$ lettres. Mais, comme ce qui précède suffit pour l'objet que j'ai eu vue, je n'entrerai pas dans de plus grands détails.

PROPOSITION XIV.

LEMME.

Le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres ne peut être égal à $n + h$ si n est à la fois plus grand que 6 et que $h + 4$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant $n + h$ valeurs.

Le nombre des valeurs que prend V par les permutations de $n - 2$ lettres ne peut être à la fois supérieur à 2 et moindre que $n - 2$, puisqu'on suppose $n - 2 > 4$, ce sera donc l'un des $h + 5$ suivants

$$1, \quad 2, \quad n-2, \quad n-1, \ldots, \quad n+h-1, \quad n+h.$$

Mais si la fonction V a, par les permutations de $n - 2$ lettres, un nombre de valeurs égal à l'un des suivants

$$n-2, \quad n-1, \ldots, \quad n+h-2, \quad n+h-1,$$

il y a aussi $n - 2$ lettres dont les permutations lui font acquérir un nombre de valeurs égal ou inférieur à l'un de ceux-ci

$$h+2, \quad h+1, \ldots, \quad 2, \quad 1,$$

d'après la proposition III, et comme $h + 2$ est $< n - 2$, on voit que si la fonction V a $n + h$ valeurs, il y a $n - 2$ lettres dont les permutations lui font acquérir un nombre de valeurs égal à l'un des trois suivants

$$1, \quad 2, \quad n+h.$$

Nous allons démontrer que ces trois cas sont impossibles.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport à* $n - 2$ *lettres.*

Alors, d'après la proposition IV, elle a n, $\frac{n(n-1)}{2}$ ou $n(n-1)$ valeurs.

Le premier cas est donc impossible, puisque, par hypothèse, le nombre $n + h$ des valeurs de V est $< 2n - 4$.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations de* $n - 2$ *lettres.*

Ce second cas est impossible, car, d'après la proposition XIII, le nombre des valeurs de V serait égal à 2 ou au moins égal à $2n$.

3°. *La fonction* V *prend ses* $n + h$ *valeurs par les permutations de* $n - 2$ *lettres.*

Cela est impossible, d'après la proposition VI, si $n + h$ est un nombre impair. Je dis que cela est encore impossible si $n + h$ est pair. En effet, si la fonction V prend toutes ses valeurs par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, elle ne peut être symétrique par rapport à a et b, d'après la proposition VII, et la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)] [x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)],$$

a, par les permutations des $n - 2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, un nombre de valeurs égal à $\frac{n+h}{2}$. Mais nous avons supposé $\frac{n+h}{2} < n - 2$ et $n - 2 > 4$, donc la fonction X ne peut avoir qu'une ou deux valeurs seulement par les permutations de $c, d, \ldots, k, l$, et, par conséquent, la fonction V n'aurait que deux ou quatre valeurs, ce qui est contre la supposition.

La proposition énoncée est donc démontrée.

PROPOSITION XV.

THÉORÈME.

Le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 6 ne peut être ni $n + 1$, ni $n + 2$, ni $n + 3$.

En faisant successivement $h = 1$ et $h = 2$ dans l'énoncé du lemme qui précède, on voit immédiatement que le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 6 ne peut être $n + 1$ ni $n + 2$.

En faisant $h = 3$, on voit pareillement que le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 7 ne peut être égal à $n + 3$. Il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème énoncé, de prouver que ce dernier résultat a lieu encore quand $n = 7$, c'est-à-dire que

Une fonction de sept lettres ne peut pas avoir un nombre de valeurs égal à dix.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e, f, g)$$

une fonction de sept lettres, et supposons qu'elle ait dix valeurs.

Le nombre des valeurs de la fonction V, par les permutations de cinq lettres, devant diviser le produit 1.2.3.4.5, et ne pouvant être ni 3 ni 4, sera l'un des nombres suivants

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 10.$$

Mais si le nombre des valeurs de V, par les permutations de cinq lettres, est 6 ou 8, il y aura cinq lettres dont les permutations feront acquérir à la fonction un nombre de valeurs égal ou inférieur à 4 ou à 2: il y a donc nécessairement cinq lettres dont les permutations feront acquérir à la fonction V un nombre de valeurs égal à l'un des quatre suivants

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 10.$$

Examinons ces quatre cas.

1°. *La fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres.*

Alors elle a, d'après la proposition IV, 7, 21 ou 42 valeurs, ce qui est contre l'hypothese.

2°. *La fonction V a deux valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Alors, si elle a plus de deux valeurs, elle en a au moins 14, d'apres la proposition XIII, ce qui est contre l'hypothèse.

3°. *La fonction V a cinq valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Alors elle est symétrique par rapport à quatre lettres. Si elle est symétrique par rapport à cinq lettres, elle a 7, 21 ou 42 valeurs (proposition IV), sinon elle en a 35, 70, 105 ou 210 (proposition XII), ce qui est contre l'hypothese.

4°. *La fonction V prend ses dix valeurs par les permutations de cinq lettres.*

Soient c, d, e, f, g ces cinq lettres, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, e, f, g)][x - \varphi(b, a, c, d, e, f, g)]$$

aura cinq valeurs par les permutations des cinq lettres c, d, e, f, g, donc elle est symétrique par rapport à quatre de ces lettres. L'équation

$$X = 0$$

ayant pour coefficients des fonctions symétriques de quatre lettres, d, e, f, g par exemple, ses deux racines seront les deux seules valeurs que peut prendre V par les permutations de ces quatre lettres. Ainsi la fonction V n'a qu'une ou deux valeurs par les permutations de quatre lettres. Or la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux quatre lettres d, e, f, g, car elle n'aurait qu'une ou cinq valeurs par les permutations des cinq lettres c, d, e, f, g, tandis que nous avons supposé qu'elle en a dix. La fonction V ne peut pas non plus avoir deux valeurs par les permutations des quatre lettres d, e, f, g; car, d'après la proposition XIII, elle en aurait deux seulement ou au moins douze par les permutations de six lettres, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc démontré qu'une fonction de sept lettres ne peut avoir dix valeurs.

PROPOSITION XVI.

LEMME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8, prend toutes ses valeurs par les seules permutations de $n - 2$ lettres, et si elle a plus de deux valeurs, elle en a au moins $2n + 4$.

Supposons que la fonction

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

prenne toutes ses valeurs par les seules permutations des $n - 2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

On a vu (propositions VI et VII) que la fonction V ne peut être symétrique par rapport aux lettres a et b, et que le nombre de ses

valeurs est pair. En outre, en désignant ce nombre par 2μ, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)]$$

a un nombre de valeurs égal à μ par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$.

Cela étant, si le nombre μ est inférieur à $n-2$, il doit être égal à 1 ou à 2; dans le premier cas, la fonction V n'a que deux valeurs. Le second cas est impossible, car la fonction V qui contient plus de huit lettres aurait un nombre de valeurs égal à quatre.

Je dis, en second lieu, que le nombre μ ne peut être égal à $n-2$; en effet, si cela était, la fonction X serait symétrique par rapport à $n-3$ lettres, à cause de $n-2>6$, et alors, d'après la proposition III, la fonction V aurait un nombre de valeurs égal à 1 ou à 2 par les permutations de $n-3$ lettres,

$$d, \ldots, \quad k, \quad l$$

par exemple. Si la fonction V est symétrique par rapport aux $n-3$ lettres $d, \ldots, k, l$, elle a $n-2$ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$; on a donc $2\mu = n-2$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse par laquelle $\mu = n-2$. La fonction V a donc deux valeurs par les permutations des $n-3$ lettres $d, \ldots, k, l$; mais alors, d'après la proposition XIII, la fonction V considérée comme fonction des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l$$

aurait deux valeurs seulement, ou elle en aurait au moins $2(n-1)$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Enfin, le nombre μ ne peut être égal ni à $n-1$, ni à n, ni à $n+1$, d'après la proposition XV, donc il est au moins égal à $n+2$, et, par conséquent, le nombre 2μ des valeurs de V est au moins égal à $2n+4$, s'il est supérieur à 2. C'est ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

1°. *Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8 a plus de n valeurs, elle en a au moins $2n$;*

2°. *Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 8 a $2n$ valeurs, il y a $n-1$ lettres dont les permutations ne font acquérir à la fonction que deux valeurs.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, et supposons que cette fonction ait plus de n valeurs, mais n'en ait pas plus de $2n$.

D'après la proposition précédente, la fonction V ne pourra prendre toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Désignons par μ le nombre de valeurs qu'elle prend par les permutations de ces $n-2$ lettres, et par $\mu+\nu$ le nombre total de ses valeurs. D'après la proposition III, il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à la fonction V un nombre de valeurs égal ou inférieur à ν : d'ailleurs la somme $\mu+\nu$ n'est pas supérieure à $2n$, par conséquent, des deux nombres μ et ν, l'un au moins est inférieur ou au plus égal à n.

Donc parmi les n lettres de la fonction V, il y en a $n-2$ dont les permutations font acquérir à cette fonction un nombre de valeurs au plus égal à n, et même au plus égal à $n-2$, puisque, d'après la proposition XIV, une fonction de $n-2$ lettres, si n est > 8, ne peut avoir $n-1$ ni n valeurs. Par les permutations des $n-2$ lettres dont il s'agit, la fonction V a donc

$$1, \quad 2, \quad \text{ou} \quad n-2$$

valeurs. Examinons ces trois cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport à $n-2$ lettres.*

Alors, d'après la proposition IV, si V a plus de n valeurs, cette fonction en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$.

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations de* $n-2$ *lettres.*

Alors, d'après la proposition XIII, cette fonction, si elle a plus de deux valeurs, en a au moins $2n$.

3°. *La fonction* V *a* $n-2$ *valeurs par les permutations de* $n-2$ *lettres.*

Dans ce cas, la fonction V est symétrique par rapport à $n-3$ lettres. Si elle n'est pas symétrique par rapport à $n-2$ lettres, elle a au moins $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ valeurs, d'après la proposition XII. Si elle est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et qu'elle ait plus de n valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, d'après la proposition IV.

Conclusion. Dans aucun des trois cas qu'on vient d'examiner, la fonction V n'a en même temps plus de n et moins de $2n$ valeurs. Dans le second cas seulement elle peut avoir $2n$ valeurs, alors elle n'a que deux valeurs par les permutations de $n-1$ lettres (corollaire I, proposition XIII). La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Le nombre des valeurs d'une fonction de n *lettres ne peut être égal ni à* $2n+1$, *ni à* $2n+2$, *ni à* $2n+3$, *si* $n>8$.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant >8, et supposons que le nombre des valeurs de cette fonction, que je représenterai par $\mu+\nu$, soit égal à l'un des trois nombres

$$2n+1, \quad 2n+2, \quad 2n+3.$$

D'après la proposition XVI, le nombre des valeurs que prendra V par les permutations de $n-2$ lettres, $c, d, \ldots, k, l$ par exemple, doit être inférieur à $\mu+\nu$; je le représenterai par μ, et alors, d'après la proposition III, il y aura $n-2$ des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$, dont les permutations feront acquérir à V un nombre μ' de valeurs égal ou inférieur à ν. Comme la somme $\mu+\nu$ est au plus égale à $2n+3$, l'un des nombres μ et μ' est nécessairement inférieur ou égal à $n+1$, donc il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à la fonction un nombre de valeurs égal ou inférieur à $n+1$; ce nombre de valeurs sera, par conséquent, l'un des suivants

$$1, \quad 2, \quad n-2, \quad n-1, \quad n, \quad n+1.$$

Mais $n-2$ étant >6, la fonction V ne peut avoir ni $n-1$, ni n, ni $n+1$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres (proposition XV), donc la fonction V a

$$1, \quad 2, \quad \text{ou} \quad n-2$$

valeurs par les permutations de $n-2$ lettres prises parmi les n

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

On va voir que cela est impossible.

1°. *La fonction V est symétrique par rapport à $n-2$ lettres.*

Dans ce cas, elle a n valeurs ou au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ (proposition IV), c'est-à-dire plus de $2n+3$, si n est >8; ce qui est contre l'hypothèse.

2°. *La fonction V a deux valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Alors elle ne peut en avoir plus de $2n$ sans en avoir au moins $n(n-1)$ (proposition XIII), ce qui est contre l'hypothèse.

3°. *La fonction V a $n-2$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres.*

Elle est alors symétrique par rapport à $n-3$ lettres, et si elle a plus de n valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ (propositions IV et XII), ce qui est contre l'hypothèse.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XIX.

LEMME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 10 a plus de deux valeurs, et qu'elle prenne toutes ses valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, elle a au moins $4n$ valeurs distinctes.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant plus de deux valeurs, et qui peut prendre toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres

$$c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Désignons par 2μ le nombre de ces valeurs qu'on sait être pair, et considérons, comme dans la proposition XVI, la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d,\ldots, k, l)],$$

qui prend μ valeurs distinctes par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$. On a vu, dans la proposition XVI, que μ est au moins égal à $n+2$ si n est > 8; nous allons montrer actuellement que μ est au moins égal à $2n$ si n est > 10.

En premier lieu, le nombre μ des valeurs que prend X par les permutations de $n-2$ lettres étant supérieur à $n-2$ est au moins égal à $2n-4$ (proposition XVII).

En second lieu, je dis qu'on ne peut avoir $\mu = 2n-4$. Supposons, en effet, que μ soit égal à $2n-4$; alors, d'après la proposition XVII, la fonction X aura précisément deux valeurs par les permutations de $n-3$ des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$. Soient X_1 et X_2 ces deux valeurs; la fonction $X_1 X_2$ sera symétrique par rapport à $n-3$ lettres, et, par conséquent, d'après la proposition I, la fonction V, qui est une des racines de l'équation du quatrième degré

$$X_1 X_2 = 0,$$

aura au plus quatre valeurs par les permutations des $n-3$ lettres $d,\ldots,$

k, l; d'ailleurs ce nombre de valeurs ne pouvant être ni 3 ni 4, est nécessairement 1 ou 2; donc la fonction V a $n-2$ ou $2(n-2)$ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, car on suppose qu'elle en a plus de deux. On a donc $2\mu = n-2$ ou $= 2(n-2)$, ce qui est contre l'hypothèse.

Enfin, d'après la proposition XVIII, le nombre μ ne peut être égal ni à $2n-3$, ni à $2n-2$, ni à $2n-1$, puisqu'on a $n-2>8$; donc μ est au moins égal à $2n$, et, par conséquent, la fonction V a au moins $4n$ valeurs.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre n de lettres supérieur à 10 a plus de 2n valeurs, elle en a au moins 4n.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, ayant plus de $2n$ valeurs, n étant > 10.

Soient a et b deux lettres quelconques, et permutons les $n-2$ autres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Si, par ces permutations, la fonction V prend toutes ses valeurs, elle a au moins $4n$ valeurs, d'après la proposition précédente, et le théorème est démontré. Supposons donc que la fonction V ne puisse pas prendre toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$. Appelons μ le nombre des valeurs de V résultant des permutations de ces $n-2$ lettres, et $\mu+\nu$ le nombre total de ses valeurs; rappelons enfin qu'il y a $n-2$ lettres dont les permutations font acquérir à V un nombre μ' de valeurs égal ou inférieur à ν.

Supposons d'abord que l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $n-2$, il sera alors égal à l'un des trois nombres

$$1, \quad 2, \quad n-2.$$

Dans le premier cas, la fonction V étant supposée avoir plus de $2n$

valeurs, en aura au moins $\frac{n(n-1)}{2}$, c'est-à-dire plus de $4n$ à cause de $n > 10$.

Dans le second cas, la fonction V a au moins $n(n-1)$ valeurs; et enfin, dans le troisième, comme elle est symétrique par rapport à $n-3$ lettres, elle a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs [*].

Supposons maintenant que chacun des nombres μ et μ' surpasse $n-2$. Alors $n-2$ étant > 8, ces deux nombres seront au moins égaux à $2(n-2)$ (proposition XVII).

Si l'un des nombres μ et μ' est égal à $2(n-2)$, la fonction V a deux valeurs par les permutations de $n-3$ lettres, d'après la proposition XVII, et, par conséquent, comme elle a plus de $2n$ valeurs, elle en a aussi plus de $\frac{n(n-1)}{2}$ (proposition XIII, corollaire II) et, à fortiori, plus de $4n$.

Enfin, d'après la proposition XVIII, aucun des nombres μ et μ' ne peut être égal à $2n-3$, ni à $2n-2$, ni à $2n-1$; si donc μ et μ' surpassent $2(n-2)$, chacun d'eux est au moins égal à $2n$, et, par conséquent, leur somme $\mu+\mu'$, et, à fortiori, la somme $\mu+\nu$, qui représente le nombre des valeurs de V, est au moins égale à $4n$.

Donc, dans tous les cas, la fonction V a au moins $4n$ valeurs, si elle en a plus de $2n$.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.

Une fonction de n lettres qui a plus de $2n$ valeurs, en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ si n est égal à 13 ou à 14.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant plus de $2n$ valeurs (on suppose $n = 13$

[*] Ce raisonnement est le même que celui de la proposition XVII.

ou 14), et permutons les $n-2$ lettres

$$c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que la fonction V prend ou ne prend pas toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$.

1°. Supposons d'abord que la fonction V prenne toutes ses valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, et désignons par 2μ ce nombre de valeurs qui sera au moins égal à $4n$, d'après la proposition XIX. Nous avons déjà vu que la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d,\ldots k, l)]$$

a μ valeurs par les permutations des $n-2$ lettres $c, d,\ldots, k, l$, et, comme on a $\mu > 2(n-2)$, μ sera au moins égal à $4(n-2)$; en vertu de la proposition précédente, par conséquent, le nombre 2μ des valeurs de la fonction V sera au moins égal à $8(n-2)$ et, par suite, supérieur à $\frac{n(n-1)}{2}$, car on suppose $n = 13$ ou 14. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

2°. Supposons que la fonction V ait $\mu + \nu$ valeurs et qu'elle ne prenne que μ valeurs distinctes par les permutations de $c, d,\ldots, k, l$, soit aussi μ' le nombre égal ou inférieur à ν qui, d'après la proposition III, représente le nombre des valeurs que prend la fonction V par les permutations de $n-2$ lettres.

Par un raisonnement identique à celui du théorème précédent, on fera voir que si l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $2(n-2)$, la fonction V a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs. Supposons donc μ et μ' supérieurs à $2(n-2)$; alors $n-2$ étant égal à 11 ou à 12, la fonction V, qui a plus de $2(n-2)$ valeurs par les permutations de $n-2$ lettres, en aura au moins $4(n-2)$. Par conséquent, chacun des nombres μ et μ' est au moins égal à $4(n-2)$, et, par suite, la fonction V a au moins $8(n-2)$ valeurs, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, comme dans le premier cas.

La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Si une fonction d'un nombre quelconque n de lettres supérieur à 12 a plus de $2n$ valeurs, elle en a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$.

Je vais démontrer que si le théorème a lieu pour les fonctions de $n-2$ lettres, il a lieu aussi pour les fonctions de n lettres, et, comme on vient de l'établir pour les fonctions de 13 et 14 lettres, il le sera généralement.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, n étant > 14, et permutons les $n-2$ lettres

$$c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Comme dans le théorème précédent, je distinguerai deux cas, suivant que la fonction prend ou ne prend pas toutes ses valeurs par les permutations de ces $n-2$ lettres.

1°. Supposons que la fonction V prenne toutes ses valeurs par les seules permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, et considérons la fonction

$$X = [x - \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)][x - \varphi(b, a, c, d, \ldots, k, l)];$$

si μ désigne le nombre des valeurs que prend la fonction X par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$, V aura 2μ valeurs, et comme on suppose $2\mu > 2n$, ce nombre sera au moins égal à $4n$, d'après la proposition XIX, et, par conséquent, la fonction X aura au moins $2n$ valeurs, c'est-à-dire plus de $2(n-2)$ par les permutations des $n-2$ lettres $c, d, \ldots, k, l$; donc, puisque la proposition énoncée est supposée vraie pour les fonctions de $n-2$ lettres, la fonction X aura au moins $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ valeurs par les permutations

de c, d,..., k, l, et, par suite, la fonction V aura au moins $(n-2)(n-3)$ valeurs, c'est-à-dire plus de $\frac{n(n-1)}{2}$, car on suppose $n > 14$. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

2°. Supposons que la fonction V ait $\mu + \nu$ valeurs, et qu'elle ne prenne que μ valeurs par les permutations des $n - 2$ lettres c, d,..., k, l.

Soit μ' le nombre, égal ou inférieur à ν, des valeurs que prend V par les permutations de $n - 2$ lettres.

Comme dans les deux propositions précédentes où j'ai employé le même raisonnement, on fera voir que si l'un des nombres μ et μ' ne surpasse pas $2(n-2)$, la fonction V ne peut avoir moins de $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs. Supposons donc μ et μ' supérieurs à $2(n-2)$: alors, comme on suppose le théorème énoncé vrai pour les fonctions de $n - 2$ lettres, chacun des nombres μ et μ' sera au moins égal à $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$; par conséquent, la somme $\mu + \nu$, qui représente le nombre total des valeurs de V, sera égale ou supérieure à $(n-2)(n-3)$ et, à fortiori, supérieure à $\frac{n(n-1)}{2}$.

La proposition est donc démontrée.

MÉMOIRE

SUR LES FONCTIONS DE QUATRE, CINQ ET SIX LETTRES;

PAR M. J.-A. SERRET.

Je me propose ici d'examiner les différents cas que peuvent présenter les fonctions de quatre et de cinq lettres, et un cas particulier remarquable des fonctions de six lettres.

Rappelons d'abord la définition des fonctions semblables. Deux fonctions d'un nombre quelconque n de lettres sont dites *semblables*, lorsque les permutations qui changent la valeur de l'une changent aussi la valeur de l'autre. On sait, en outre, que, si V et y sont des fonctions semblables de n lettres ayant μ valeurs distinctes, la fonction V peut être exprimée par un polynôme entier et rationnel de degré $\mu - 1$ en y, et dont les coefficients sont des fonctions symétriques.

LEMME I. *Le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre quelconque n de lettres, peut être représenté par $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$, $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ étant les nombres de valeurs distinctes que l'on obtient en permutant différents groupes composés chacun d'un même nombre m de lettres.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres. Supposons que, par les permutations de m lettres

$$g, \quad h, \ldots, \quad k, \quad l,$$

la fonction V prenne μ valeurs distinctes

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

et que, par les permutations de toutes les lettres, elle prenne les $\mu + \nu$ valeurs

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}.$$

Le produit

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_{\mu+\nu})$$

est une fonction symétrique des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$; pareillement

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_\mu)$$

est une fonction symétrique des m lettres $g, h, \ldots, k, l$; donc le produit

$$(x - V_{\mu+1})(x - V_{\mu+2})\ldots(x - V_{\mu+\nu}),$$

qu'on obtient en divisant les deux produits précédents l'un par l'autre, est aussi une fonction symétrique des m lettres $g, h, \ldots, k, l$.

Si la fonction $V_{\mu+1}$ peut prendre les ν valeurs

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}$$

par les permutations des lettres $g, h, \ldots, k, l$; comme elle ne peut en prendre d'autres [*], il y aura nécessairement m lettres dont les permutations feront acquérir à V un nombre de valeurs égal à ν, et, dans ce cas, notre proposition est démontrée.

Supposons donc que $V_{\mu+1}$ ne puisse prendre que les μ' valeurs

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'}$$

par les permutations de $g, h, \ldots, k, l$; que $V_{\mu+\mu'+1}$ prenne les μ'' valeurs

$$V_{\mu+\mu'+1}, \quad V_{\mu+\mu'+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'+\mu''}$$

par les permutations de ces mêmes lettres; que pareillement, si ν surpasse $\mu' + \mu''$, $V_{\mu+\mu'+\mu''+1}$ prenne les μ''' valeurs

$$V_{\mu+\mu'+\mu''+1}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''},$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les valeurs de V; alors le nombre des valeurs de V sera $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$, et les fonc-

[*] D'après la proposition I du Mémoire précédent.

tions V_1, $V_{\alpha+1}$, $V_{\mu+\mu'+1}$, $V_{\mu+\mu'+\mu''+1}$,... auront respectivement

$$\mu, \quad \mu', \quad \mu'', \ldots$$

valeurs par les permutations des m lettres g, h,..., k, l; d'où il suit que l'on pourra former différents groupes de m lettres, tels que par les permutations des lettres de chaque groupe, la fonction V prenne des nombres de valeurs respectivement égaux à μ, μ', μ'',.... Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme II. *Si une fonction de n lettres a μ valeurs par les permutations de $n-1$ lettres, le nombre total de ses valeurs est un diviseur du produit $n\mu$.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, et représentons par

(1) $$\varphi_1(a), \quad \varphi_2(a), \ldots, \quad \varphi_\mu(a),$$

les valeurs en nombre μ que peut prendre cette fonction par les permutations des $n-1$ lettres

$$b, \quad c, \quad d, \ldots, \quad k, \quad l.$$

Si dans les fonctions (1) on transpose la lettre a avec chacune des $n-1$ autres, on aura $(n-1)\mu$ nouvelles valeurs de V, ce qui fera $n\mu$ en tout. Écrivons ces $n\mu$ valeurs

(2) $$\left\{\begin{array}{llll} \varphi_1(a), & \varphi_2(a), \ldots, & \varphi_\mu(a), \\ \varphi_1(b), & \varphi_2(b), \ldots, & \varphi_\mu(b), \\ \varphi_1(c), & \varphi_2(c), \ldots, & \varphi_\mu(c), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(l), & \varphi_2(l), \ldots, & \varphi_\mu(l), \end{array}\right.$$

qui seront évidemment les seules que la fonction V puisse acquérir. Je dis maintenant que si ces $n\mu$ valeurs ne sont pas distinctes, chacune des valeurs distinctes se trouve répétée le même nombre de fois. Sup-

posons, en effet, que l'une des fonctions (2), que je représenterai simplement par V, se trouve reproduite λ fois, et soit V' une quelconque des fonctions (2) distinctes de V. Faisons la permutation par laquelle on passe de V' à V, les fonctions (2) ne feront que se changer les unes dans les autres. Par conséquent, la fonction V', qui est devenue V, étant reproduite λ fois, l'était aussi λ fois avant la permutation. Ce qu'il fallait démontrer.

§ I.

Des fonctions de quatre lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d)$$

une fonction de quatre lettres a, b, c, d.

Le nombre des valeurs que peut prendre cette fonction par les permutations de trois lettres devant être un diviseur du produit $1.2.3$ sera nécessairement l'un des quatre nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6;$$

il y a donc quatre cas à distinguer, suivant que la fonction prend une, deux ou trois valeurs par les permutations de trois lettres, et enfin, le cas où la fonction prend toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

1°. Supposons que la fonction V soit symétrique par rapport aux trois lettres b, c, d.

Dans ce cas, elle a quatre valeurs par les permutations des quatre lettres, ou elle n'en a qu'une seule. La fonction est semblable à l'un des deux types suivants

$$a, \quad a + b + c + d.$$

2°. Supposons que la fonction V ait deux valeurs par les permutations des trois lettres b, c, d.

Alors, elle a la forme

$$A + B(b - c)(b - d)(c - d),$$

en désignant par A et B des fonctions de a, b, c, d symétriques par rapport à b, c, d; ou mieux la forme

$$A + B\nu,$$

en posant

$$\nu = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d).$$

Si A et B sont symétriques par rapport aux quatre lettres a, b, c, d, la fonction V a deux valeurs seulement et elle est semblable à la fonction type ν. Si, au contraire, l'une des fonctions A et B n'est symétrique que par rapport aux trois lettres b, c, d, la fonction V a huit valeurs, et elle est semblable au type

$$(b - c)(b - d)(c - d).$$

3°. Supposons que la fonction V ait trois valeurs par les permutations des trois lettres b, c, d.

Dans ce cas, elle est symétrique par rapport à deux de ces trois lettres. Admettons que ce soit par rapport à c et d. Alors, si la fonction V est symétrique par rapport aux trois lettres a, c, d, elle a quatre valeurs, et son type est indiqué plus haut.

Si V n'est pas symétrique par rapport aux lettres a, c, d, il peut arriver qu'elle soit symétrique par rapport aux lettres a et b, ou qu'elle ne le soit pas. Dans le dernier cas, le nombre des valeurs de V est évidemment égal au nombre des arrangements de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à douze, et la fonction V est semblable au type

$$a + 2b - c - d.$$

Si la fonction V est, au contraire, symétrique par rapport aux lettres a et b en même temps qu'elle l'est par rapport aux lettres c et d, et que, de plus, elle change par le changement réciproque de a et b en c et d, le nombre de ses valeurs est évidemment égal au nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à 6, et la fonction est semblable au type

$$a + b - c - d.$$

Mais, si la fonction V, symétrique par rapport à a et b et par rapport à c et d, ne change pas par le changement réciproque de a et b en c et d, le nombre de ses valeurs est la moitié du nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire 3, et la fonction est semblable aux deux types équivalents

$$(a+b-c-d)^2, \qquad ab+cd.$$

4°. Supposons maintenant que la fonction V ait toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois quelconques des quatre lettres a, b, c, d. Le nombre total des valeurs de V doit diviser le produit $1.2.3.4 = 24$, et, d'après le lemme I, il doit être un multiple de 6; il sera donc égal à 6, 12 ou 24. Nous examinerons d'abord le premier cas.

Puisque la fonction V n'a que six valeurs distinctes, parmi les 24 permutations des 4 lettres a, b, c, d, il y en a quatre qui font acquérir à la fonction la même valeur; d'ailleurs deux permutations, où l'une des quatre lettres a, b, c, d occupe la même place, ne peuvent correspondre à des valeurs égales de V, puisque cette fonction prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques; donc les quatre permutations qui font acquérir à V la même valeur sont comprises dans les dix suivantes :

$$\begin{array}{llll}
(1)\ a,\ b,\ c,\ d; & (2)\ b,\ a,\ d,\ c; & (5)\ c,\ d,\ a,\ b; & (8)\ d,\ c,\ b,\ a; \\
 & (3)\ b,\ c,\ d,\ a; & (6)\ c,\ d,\ b,\ a; & (9)\ d,\ c,\ a,\ b; \\
 & (4)\ b,\ d,\ a,\ c; & (7)\ c,\ a,\ d,\ b; & (10)\ d,\ a,\ b,\ c.
\end{array}$$

Or les six permutations (3), (4), (6), (7), (9), (10) se déduisent de la première par une *substitution circulaire* [*]; il arrivera donc de deux choses l'une: ou bien la fonction V ne sera pas changée par une substitution circulaire effectuée sur les quatre lettres qu'elle renferme,

[*] Une substitution est dite circulaire lorsque, ayant écrit un certain nombre de lettres dans un ordre quelconque aux sommets d'un polygone régulier, la substitution consiste à remplacer chaque lettre par celle qui la suit.

ou bien les permutations (1), (2), (5), (8), c'est-à-dire

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d; \\ b, & a, & d, & c; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & c, & b, & a; \end{array}$$

lui feront acquérir la même valeur. Dans ce dernier cas, la fonction V ne change pas quand on transpose deux lettres quelconques, pourvu qu'on transpose en même temps les deux autres. Elle est semblable au type

$$(a-b)(c-d).$$

Si, au contraire, la fonction V reste invariable par une permutation circulaire, par exemple par celle qui équivaut au changement de a, b, c, d en c, d, b, a, et qu'on représente par la notation

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix},$$

elle ne changera pas non plus en répétant deux ou trois fois cette même permutation, car l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d) = \varphi(c, d, b, a)$$

entraîne les deux suivantes :

$$\varphi(c, d, b, a) = \varphi(b, a, d, c),$$
$$\varphi(b, a, d, c) = \varphi(d, c, a, b).$$

La fonction V est alors semblable au type

$$(a-b)(c-d)[(a-b)^2-(c-d)^2].$$

Considérons maintenant le cas où la fonction V a douze valeurs. Alors elle doit nécessairement changer de valeur par une permutation circulaire des quatre lettres a, b, c, d, car autrement elle n'aurait

que six valeurs, par conséquent, parmi les quatre permutations

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d; \\ b, & a, & d, & c; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & c, & b, & a. \end{array}$$

Il y en a deux qui font acquérir la même valeur à la fonction V. En d'autres termes, la fonction V doit rester la même quand on fait les transpositions (a, b) et (c, d), ou (a, c) et (b, d), ou (a, d) et (b, c). La fonction est semblable au type

$$(a + 2b)(c + 2d),$$

qui ne change pas par l'effet des deux transpositions (a, c) et (b, d).

Enfin, si la fonction V a vingt-quatre valeurs, elle sera semblable au type

$$a + 2b + 3c + 4d.$$

Résumé.

Il résulte de cette discussion que les fonctions de quatre lettres peuvent être partagées en onze classes de la manière suivante :

1°. Les fonctions symétriques ;

2°. Les fonctions qui ont deux valeurs distinctes ;

3°. Les fonctions qui ont trois valeurs distinctes ;

4°. Les fonctions qui ont quatre valeurs distinctes. Elles sont symétriques par rapport à trois lettres ;

5°. Les fonctions qui ont six valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres, et symétriques aussi par rapport aux deux autres ;

6°. Les fonctions qui ont six valeurs et qui ne sont pas changées par une permutation circulaire des quatre lettres ;

7°. Les fonctions qui ont six valeurs, et qui ne sont pas changées quand on transpose deux lettres, pourvu qu'on transpose aussi les deux autres ;

8°. Les fonctions qui ont huit valeurs. Elles n'ont que deux valeurs distinctes par les permutations de trois lettres;

9°. Les fonctions qui ont douze valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres;

10°. Les fonctions qui ont douze valeurs et qui ne sont pas symétriques par rapport à deux lettres. On peut disposer les quatre lettres en deux groupes tels, que les fonctions dont il s'agit ne soient pas changées par les transpositions simultanées des lettres de chaque groupe;

11°. Les fonctions qui ont vingt-quatre valeurs.

Remarque. Le nombre des valeurs d'une fonction de quatre lettres peut être un diviseur quelconque du produit 1.2.3.4.

§ II.

Des fonctions de cinq lettres.

Nous distinguerons deux cas principaux que nous subdiviserons eux-mêmes en plusieurs. Le premier cas est celui des fonctions qui ont moins de six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres. Le second cas, au contraire, est celui des fonctions qui prennent six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

Premier cas.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e)$$

une fonction de cinq lettres a, b, c, d, e, et supposons que cette fonction ait moins de six valeurs par les permutations des trois lettres c, d, e; ce nombre de valeurs étant un diviseur de $1.2.3 = 6$ ne peut être que l'un des trois nombres

$$1, \quad 2, \quad 3.$$

Nous allons analyser ces trois cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux lettres* c, d, e.

Alors, si elle est symétrique par rapport à quatre lettres, b, c,

d, e par exemple, sans l'être par rapport aux cinq lettres, elle a cinq valeurs.

Si elle n'est pas symétrique par rapport à quatre lettres, mais qu'elle le soit par rapport à a et b, elle a dix valeurs. Enfin elle en a vingt si elle n'est pas symétrique par rapport à a et b.

La fonction est semblable à l'un des quatre types suivants :

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e,\\ 2a + b + c + d + e,\\ 2a + 2b + c + d + e,\\ 3a + 2b + c + d + e. \end{aligned}$$

2°. *La fonction V a deux valeurs par les permutations des trois lettres c, d, e.*

Dans ce cas, on peut poser

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \mathrm{A} + \mathrm{B}(c-d)(c-e)(d-e),$$

ou même

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \mathrm{A} + \mathrm{B}v,$$

en faisant, pour abréger,

$$v = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e),$$

et en désignant par A et B des fonctions de a, b, c, d, e, symétriques par rapport à c, d, e, et dont le type a été indiqué plus haut.

Si A et B sont symétriques par rapport aux cinq lettres a, b, c, d, e, la fonction V n'a que deux valeurs, et elle est semblable au type v. Autrement, je dis qu'elle a dix, vingt ou quarante valeurs.

Rappelons d'abord que la fonction V change par une transposition quelconque des trois lettres c, d, e, et qu'elle ne change pas par une permutation circulaire de ces trois lettres, dont l'effet équivaut à celui de deux transpositions. La fonction V changera aussi de valeur si l'on remplace les deux lettres a et b par deux autres d, e, quel que soit l'ordre qu'on adopte pour les trois dernières ; si, en effet, on avait

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(d, e, \ldots),$$

la fonction V n'aurait que deux valeurs par les permutations des lettres a, b, c, et, par conséquent, elle ne changerait pas de valeur par une permutation circulaire de ces trois lettres. Mais si la fonction V n'est changée par aucune permutation circulaire de a, b, c et de c, d, e, elle ne changera par aucune permutation circulaire de trois lettres quelconques. D'où il résulte que deux transpositions quelconques sont équivalentes, et, par suite, que la fonction V n'a que deux valeurs, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soient maintenant V′ et V″ les deux valeurs que prend V par les permutations des lettres c, d, e, et posons

$$X = (x - V')(x - V'');$$

la fonction X étant symétrique par rapport à c, d, e, le nombre μ de ses valeurs est égal à 5, 10 ou 20. Soient

$$X_1 = (x - V'_1)(x - V''_1),$$
$$X_2 = (x - V'_2)(x - V''_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_\mu = (x - V'_\mu)(x - V''_\mu),$$

les μ valeurs de X qui sont, par hypothèse, différentes. Je dis que deux de ces valeurs ne sauraient avoir un facteur commun. Supposons, en effet, que l'on ait

$$V'_1 = V'_2 \quad \text{ou} \quad = V''_2.$$

D'après ce que nous venons de montrer tout à l'heure, deux des trois dernières lettres de V'_1 doivent faire partie des trois dernières lettres de V'_2 ou de V''_2; mais, en faisant la transposition de ces deux lettres, la précédente équation devient

$$V''_1 = V''_2 \quad \text{ou} \quad = V'_2,$$

et, par conséquent, X_1 et X_2 sont identiques, ce qui est contre l'hypothèse. En égalant à zéro le produit de toutes les fonctions X, on aura une équation de degré 2μ dont les coefficients seront des fonctions symétriques, et dont les 2μ racines toutes inégales seront les valeurs de la fonction V.

La fonction V a donc dix, vingt ou quarante valeurs, suivant que μ est égal à 5, 10 ou 20.

Si l'on a $\mu = 5$, la fonction X est symétrique par rapport à quatre lettres, b, c, d, e par exemple, et alors la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations de ces quatre lettres; elle a la forme

$$A + Bv,$$

où A et B désignent des fonctions symétriques de b, c, d, e, dont l'une au moins n'est pas symétrique par rapport aux cinq lettres, et elle est semblable au type

$$av.$$

Si l'on a $\mu = 10$, la fonction X est symétrique par rapport aux lettres a et b; mais il peut arriver deux cas: ou bien les deux facteurs de X sont chacun symétriques par rapport à a et b, ou bien ils se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b). Dans le premier cas, la fonction V est symétrique par rapport à a et b et a deux valeurs par les permutations de c, d, e; elle a donc la forme

$$A + B(c-d)(c-e)(d-e),$$

où A et B désignent des fonctions symétriques par rapport à a et b en même temps que par rapport à c, d, e. Elle est semblable au type

$$(a+b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Mais il n'en est plus de même si les facteurs de X se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b), comme par la transposition de deux quelconques des trois lettres c, d, e. Alors, en posant

$$V'_1 = A + B(c-d)(c-e)(d-e),$$
$$V''_1 = A - B(c-d)(c-e)(d-e),$$

comme V'_1 et V''_1 se changent l'une dans l'autre par la transposition (a, b), leur somme et leur produit ne changeront pas, et, par conséquent, A et B^2 sont des fonctions symétriques de a et b; d'ailleurs B ne peut être elle-même symétrique par rapport à a et b, elle a donc la forme $B'(a-b)$, et l'on peut poser

$$V = A + B(a-b)(c-d)(c-e)(d-e),$$

en désignant ici par A et B des fonctions symétriques par rapport à a et b en même temps que par rapport à c, d, e. Le type de la fonction V est alors

$$(a-b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Enfin, si $\mu = 20$, la fonction V a 40 valeurs; il n'y a donc que les permutations circulaires des trois lettres c, d, e qui la laissent invariable, et, par conséquent, la fonction V est semblable au type

$$(a+2b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Remarque. Les fonctions de cinq lettres qui ont deux valeurs par les permutations de trois lettres offrent cinq types différents; mais elles sont toutes comprises dans la formule générale

$$A + B(c-d)(c-e)(d-e),$$

où A et B désignent des fonctions des cinq lettres a, b, c, d, e, symétriques par rapport aux trois dernières.

3°. *La fonction* V *a trois valeurs par les permutations des trois lettres* c, d, e.

Alors elle est symétrique par rapport à deux lettres d et e par exemple. Si elle a une ou deux valeurs seulement par les permutations des trois lettres a, b, c, elle se trouve comprise dans l'une des deux catégories que nous venons d'étudier. Nous supposerons donc que V a trois ou six valeurs par les permutations des lettres a, b, c.

Si la fonction V a trois valeurs par les permutations des lettres a, b, c, elle est symétrique par rapport à deux de ces lettres. Supposons que ce soient b et c. Comme nous nous sommes déjà occupés du cas des fonctions symétriques par rapport à trois lettres, il n'y a ici que deux cas à distinguer : ou bien la fonction V, symétrique par rapport à b et c en même temps que par rapport à d et e, change par le changement réciproque de b et c en d et e, ou bien elle ne change pas. Dans le premier cas, il est évident que le nombre des valeurs de la fonction est égal à cinq fois le nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à 30; dans le second cas, ce nombre de valeurs est moitié moindre. Dans le premier cas, la fonction est

semblable au type

$$a^2 + bc - de;$$

dans le second cas, elle a pour type

$$a^2 + bc + de,$$

fonction qui a quinze valeurs.

Si la fonction V a six valeurs par les permutations des trois lettres a, b, c, comme elle est symétrique par rapport à d et e, elle aura évidemment un nombre de valeurs égal au nombre des arrangements de cinq lettres trois à trois, c'est-à-dire à 60. La fonction est alors semblable au type

$$a + 2b + 3c + 4d + 4e.$$

Second cas.

Soit maintenant

$$V = \varphi(a, b, c, d, e)$$

une fonction de cinq lettres a, b, c, d, e, qui prend toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

Je dis d'abord que la fonction V, considérée comme fonction de quatre lettres seulement, b, c, d, e par exemple, ne peut avoir un nombre de valeurs égal à 8. En effet, le nombre des valeurs de V par les permutations de trois quelconques des quatre lettres b, c, d, e étant toujours égal à 6, le nombre des valeurs que prend cette fonction par les permutations des quatre lettres b, c, d, e doit être un multiple de 6 en vertu du lemme I; ce nombre de valeurs est donc égal à 6, 12 ou 24.

Si la fonction V a six valeurs seulement par les permutations de quatre lettres, le nombre de ses valeurs sera un diviseur de 30, d'après le lemme II, et il sera un multiple de 6 d'après le lemme I, puisque le nombre des valeurs que prend V par les permutations de quatre lettres est toujours l'un des nombres 6, 12 ou 24. Donc le nombre des valeurs de V est nécessairement 6 ou 30.

Si la fonction V a plus de six valeurs par les permutations de quatre lettres quelconques, mais qu'il y ait quatre lettres dont les permutations lui fassent acquérir un nombre de valeurs égal à 12, le nombre

total des valeurs de V sera un diviseur de 60 d'après le lemme II, et il sera un multiple de 12 d'après le lemme I, puisque, dans ce cas, la fonction a toujours douze ou vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres. Donc le nombre total des valeurs de V est 12 ou 60.

Enfin, si la fonction V a toujours vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres, le nombre total de ses valeurs, devant être à la fois un diviseur de 120 et un multiple de 24, sera nécessairement 24 ou 120.

Notre second cas se subdivise donc en six autres que nous allons discuter.

1°. *La fonction* V *a six valeurs.*

Puisque la fonction V, considérée comme fonction de quatre lettres, a, b, c, d par exemple, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques, elle ne change pas par une certaine permutation circulaire de ces quatre lettres, ou bien la transposition de deux quelconques de ces quatre lettres équivaut à la transposition des deux autres, ainsi qu'on l'a vu dans le § I de ce Mémoire. Dans l'un et l'autre cas, il y a deux lettres parmi les quatre a, b, c, d dont la transposition équivaut à la transposition des deux autres; car si la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de quatre lettres, elle ne changera pas non plus en répétant une seconde fois cette même permutation, mais alors on n'aura produit d'autre changement que la transposition de deux des quatre lettres a, b, c, d, en même temps que la transposition des deux autres. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$(a, d) = (b, c). \tag{1}$$

Pareillement, parmi les quatre lettres a, b, c, e, il y en a deux dont la transposition équivaut à la transposition des deux autres. Or (a, e) ne peut être égale à (b, c); car, à cause de l'égalité (1), les transpositions (a, d) et (a, e) qui ont une lettre commune seraient équivalentes, et, par conséquent, la fonction V n'aurait pas six valeurs distinctes par les permutations des lettres a, d, e, comme nous l'avons supposé.

Les transpositions (a, b) et (c, e) ou (a, c) et (b, e) sont donc égales;

supposons

$$(2) \qquad (a, b) = (c, e)\,[*].$$

Maintenant, en ayant égard aux égalités (1) et (2) et se rappelant que deux transpositions qui ont une lettre commune ne peuvent être égales, les trois combinaisons des cinq lettres a, b, c, d, e, quatre à quatre, que nous n'avons pas encore considérées, donneront nécessairement

$$(3) \qquad (a, e) = (b, d),$$

$$(4) \qquad (a, c) = (d, e),$$

$$(5) \qquad (b, e) = (c, d).$$

Ainsi les dix transpositions que l'on peut faire avec les cinq lettres a, b, c, d, e sont équivalentes deux à deux. Il en résulte qu'il y a une permutation circulaire des cinq lettres a, b, c, d, e, qui ne change pas la fonction V. En effet, la fonction V ne change pas si l'on transpose la première lettre avec la quatrième, et la deuxième avec la troisième; on a donc

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(d, c, b, a, e).$$

Pareillement, le second membre ne changera pas si l'on transpose la première lettre avec la troisième, et la quatrième avec la cinquième; on a donc

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(b, c, d, e, a),$$

et, par conséquent, on voit que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire de cinq lettres

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}.$$

Je dis, en outre, qu'il y a une permutation circulaire des quatre lettres b, c, d, e qui ne change pas la fonction V; en effet, s'il en était autrement, comme la fonction V prend ses six valeurs par les

[*] On peut toujours faire cette hypothèse, sauf à changer le nom des lettres de V.

permutations de trois quelconques des lettres b, c, d, e, la transposition de deux quelconques de ces quatre lettres serait équivalente à la transposition des deux autres; on aurait, par exemple,

$$(b, c) = (d, e),$$

et les égalités (1) et (3) donneraient

$$(a, c) = (a, d),$$

ce qui est impossible puisque ces deux transpositions ont une lettre commune. Il est aisé de découvrir quelle est la permutation circulaire des quatre lettres b, c, d, e qui laisse la fonction V invariable; car, en répétant deux fois cette permutation circulaire, on ne produit d'autre effet que la transposition de deux lettres en même temps que la transposition des deux autres. Ces deux transpositions devant être égales ne peuvent être que (b, e) et (c, d); d'où l'on conclut aisément que la permutation circulaire des lettres b, c, d, e, qui n'altère pas V, est

$$\begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} b & d & e & c \\ d & e & c & b \end{pmatrix}.$$

Mais il est évident que chacune de ces permutations laissera V invariable, car chacune d'elles produit le même effet que l'autre répétée trois fois.

Ainsi la fonction que nous considérons demeure invariable par les deux permutations circulaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix}.$$

Concluons donc que les fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs sont invariables par deux permutations circulaires, l'une de cinq, l'autre de quatre lettres, et que les fonctions de ce genre sont toutes semblables à un même type. On peut prendre pour type de ces fonctions, l'une de celles que Lagrange a considérées dans son étude sur la résolution générale des équations. Ce sont les fonctions symé-

triques des cinq expressions suivantes :

$$(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4)^5,$$
$$(a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4)^5,$$
$$(a + b\gamma + c\gamma^2 + d\gamma^3 + e\gamma^4)^5,$$
$$(a + b\delta + d\delta^2 + d\delta^3 + e\delta^4)^5,$$

où α, β, γ, δ désignent les quatre racines de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

On peut aussi déduire de notre analyse un type assez simple des fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs. Si l'on forme les produits deux à deux des cinq lettres a, b, c, d, e, que l'on ajoute ensemble les deux produits qui correspondent à deux transpositions équivalentes, et qu'on multiplie la somme par le carré de la cinquième lettre qui n'y entre pas, on obtiendra les cinq fonctions suivantes :

$$(ad + bc)\, e^2,$$
$$(ab + ce)\, d^2,$$
$$(ae + bd)\, c^2.$$
$$(ac + de)\, b^2,$$
$$(be + cd)\, a^2.$$

Or, si l'on applique à ces fonctions l'une quelconque des deux substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

elles ne font que s'échanger les unes dans les autres; donc leur somme ne changera par aucune de ces permutations, et comme d'ailleurs elle n'est pas symétrique, elle aura six valeurs distinctes. On peut donc prendre pour type des fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs, la fonction suivante,

$$a^2(be + cd) + b^2(ac + de) + c^2(ae + bd) + d^2(ab + ce) + e^2(ad + bc),$$

qui est homogène et du quatrième degré.

2°. *La fonction* V *a trente valeurs.*

Comme elle a six valeurs par les permutations de trois quelconques des quatre lettres b, c, d, e, considérée comme fonction de ces quatre lettres, elle est semblable à l'un des deux types

$$(b-c)(d-e),$$
$$(b-c)(d-e)[(b-c)^2-(d-e)^2].$$

Les fonctions que nous considérons forment donc deux classes. Les permutations qui laissent invariables les fonctions de la première classe sont les transpositions simultanées que l'on forme en partageant quatre lettres en deux groupes. Les fonctions de la seconde espèce ne sont pas changées par une permutation circulaire de quatre lettres. On peut prendre les deux fonctions qu'on vient d'écrire pour types des fonctions de cinq lettres qui ont trente valeurs, et qui en ont toujours six par les permutations de trois lettres quelconques.

3°. *La fonction* V *a douze valeurs.*

Dans ce cas, la fonction V prend ses douze valeurs par les permutations de quatre lettres quelconques, comme nous en avons déjà fait la remarque au commencement de ce paragraphe. En outre, comme de ces douze valeurs elle en prend toujours six par les permutations de trois lettres quelconques, il résulte de ce qui a été dit dans le § I, qu'on peut partager quatre quelconques des cinq lettres a, b, c, d, e en deux groupes tels, que la transposition des lettres du premier groupe soit équivalente à la transposition des lettres du second groupe. D'où il résulte, comme nous l'avons vu précédemment, que les dix transpositions sont équivalentes deux à deux, et que la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres.

On voit donc que les fonctions de cinq lettres qui ont douze valeurs restent invariables par une permutation circulaire de cinq lettres, $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$ par exemple, et par les transpositions simultanées (a, d) et (b, c).

On peut prendre pour type le produit

$$vy,$$

en posant

$$v = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e),$$

et en désignant par y une fonction de cinq lettres qui a six valeurs.

4°. *La fonction* V *a soixante valeurs.*

Considérée comme fonction des quatre lettres b, c, d, e, elle a douze valeurs et elle est semblable au type

$$(b+2c)(d+2e),$$

d'après le § I. La seule permutation qui ne change pas sa valeur équivaut aux deux transpositions simultanées (b, d), (c, e); donc les fonctions de cinq lettres, qui ont soixante valeurs et qui en ont six par les permutations de trois lettres quelconques, sont semblables au type qu'on vient d'écrire.

5°. *La fonction* V *a vingt-quatre valeurs.*

Dans ce cas, il y a cinq permutations qui donnent à la fonction V la même valeur. Désignons par A et A′ deux permutations quelconques donnant à V la même valeur. Je dis que A′ doit nécessairement se déduire de A par une permutation circulaire de cinq lettres. En effet, A′ se déduit nécessairement de A

ou par une permutation circulaire de cinq lettres,
ou par une permutation circulaire de quatre lettres,
ou par une permutation circulaire de trois lettres jointe à une transposition,
ou par une seule permutation circulaire de trois lettres,
ou par deux transpositions,
ou par une transposition.

Le deuxième, le quatrième, le cinquième et le sixième cas sont impossibles, car la fonction V n'aurait pas vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres.

Le troisième cas est également impossible, car en répétant trois fois l'opération par laquelle on passe de la permutation A à la permuta-

tion A′, en obtiendrait une permutation A″ qui donnerait à V la même valeur que la permutation A. Or A et A″ se déduisent l'une de l'autre par une simple transposition, et la fonction V n'est pas symétrique par rapport à deux lettres; donc, etc.

Donc la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres.

Il suit de là que les fonctions de cinq lettres qui ont vingt-quatre valeurs sont semblables. On peut prendre pour type la fonction résolvante de Lagrange pour l'équation du cinquième degré, savoir

$$(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4)^5,$$

où α désigne une racine de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

6°. *La fonction* V *a cent vingt valeurs.*

On peut prendre pour type

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e.$$

Résumé.

Il résulte de cette discussion que les fonctions de cinq lettres peuvent être partagées en dix-neuf classes de la manière suivante :

1°. Les fonctions symétriques.

2°. Les fonctions qui ont deux valeurs distinctes.

3°. Les fonctions qui ont cinq valeurs distinctes; elles sont symétriques par rapport à quatre lettres.

4°. Les fonctions qui ont six valeurs distinctes. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres et une de quatre qui ne changent pas leur valeur.

5°. Les fonctions qui ont dix valeurs et qui sont symétriques par rapport à trois lettres.

6°. Les fonctions qui ont dix valeurs et qui ont deux valeurs par les permutations de quatre lettres.

7°. Les fonctions qui ont douze valeurs. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres qui ne change pas leur valeur. On peut aussi grouper quatre lettres quelconques deux à deux, de manière que les transpositions simultanées des lettres de chaque groupe ne changent pas les fonctions de cette espèce.

8°. Les fonctions qui ont quinze valeurs. Elles sont symétriques par rapport à deux lettres, symétriques aussi par rapport à deux autres, et, de plus, elles ne changent pas en transposant les deux premières respectivement avec les deux dernières.

9°. Les fonctions qui ont vingt valeurs et qui sont symétriques par rapport à trois lettres.

10°. Les fonctions qui ont vingt valeurs, qui sont symétriques par rapport à deux lettres, et ont deux valeurs par les permutations des trois autres lettres.

11°. Les fonctions qui ont vingt valeurs, et qui ont deux valeurs par les permutations de trois lettres, sans être symétriques par rapport aux deux autres.

12°. Les fonctions qui ont vingt-quatre valeurs. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres qui ne change pas leur valeur.

13°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres, symétriques aussi par rapport à deux autres, mais qui changent quand on transpose les deux premières respectivement avec les deux autres.

14°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui ne changent pas par une permutation circulaire de quatre lettres.

15°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui contiennent quatre lettres, de telle manière qu'elles ne changent pas quand on transpose deux quelconques de ces quatre lettres, pourvu qu'on transpose en même temps les deux autres.

16°. Les fonctions qui ont quarante valeurs. Elles n'ont que deux valeurs par les permutations de trois des cinq lettres.

17°. Les fonctions qui ont soixante valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres.

18°. Les fonctions qui ont soixante valeurs et qui ne sont pas symétriques par rapport à deux lettres.

19°. Les fonctions qui ont cent vingt valeurs.

Remarque. Tout diviseur du produit 1.2.3.4.5, à l'exception de 3, 4 et 8, peut représenter le nombre des valeurs d'une fonction de cinq lettres.

§ III.

Des fonctions de six lettres qui ont six valeurs distinctes.

Dans le Mémoire précédent, j'ai démontré qu'une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs distinctes, est symétrique par rapport à $n-1$ lettres, à moins que n ne soit égal à 6. Les fonctions de six lettres constituent ainsi une exception digne de remarque; j'indiquerai, en terminant ce Mémoire, la composition des fonctions de six lettres non symétriques par rapport à cinq lettres et qui offrent cependant six valeurs distinctes.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e, f)$$

une fonction de six lettres qu'on suppose avoir six valeurs distinctes.

Le nombre des valeurs qu'on peut obtenir par les permutations des cinq lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e,$$

ne pouvant être égal ni à 3 ni à 4, sera l'un des quatre suivants :

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 6.$$

Dans le premier cas, la fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres, et elle a effectivement six valeurs distinctes.

Le deuxième cas est impossible, car le nombre total des valeurs de V serait égal à 2 ou à 12, ce qui est contre l'hypothèse.

Dans le troisième cas, la fonction V a cinq valeurs par les permutations de cinq lettres, et elle en a six par les permutations des six lettres; il en résulte que la fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres.

9..

Il suit de là que si la fonction V n'est pas symétrique par rapport à cinq lettres, elle doit prendre ses six valeurs par les permutations de cinq lettres quelconques. D'ailleurs on a vu, dans le paragraphe précédent, qu'une fonction de cinq lettres qui a six valeurs, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques : donc, *une fonction de six lettres, qui a six valeurs distinctes et qui n'est pas symétrique par rapport à cinq lettres, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques.*

En considérant V comme fonction des cinq lettres a, b, c, d, e, on a vu que cette fonction n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres et par une de quatre ; soient, comme dans le paragraphe précédent,

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

ces deux permutations. Pour établir que la fonction V n'est pas changée par la première des deux permutations circulaires précédentes, nous avons démontré que les dix transpositions que l'on obtient en combinant deux à deux les cinq lettres a, b, c, d, e, sont équivalentes deux à deux : on a

$$\begin{aligned} (a, d) &= (b, c), \\ (a, b) &= (c, e), \\ (a, e) &= (b, d), \\ (a, c) &= (d, e), \\ (b, e) &= (c, d); \end{aligned}$$

ce qui, au surplus, peut être déduit, à postériori, de ce que la fonction V n'est pas changée par les deux permutations circulaires écrites plus haut.

Si maintenant on considère les quinze transpositions qu'on obtient en combinant les six lettres deux à deux, il est évident que les cinq qui contiennent la lettre f devront être respectivement équivalentes à cinq des dix autres ; et comme deux transpositions qui ont une lettre commune ne peuvent être équivalentes, ainsi que j'en ai fait la remarque

dans le paragraphe précédent, on aura nécessairement

$$\begin{gathered}(a, d)=(b, c)=(e, f),\\(a, b)=(c, e)=(d, f),\\(a, e)=(b, d)=(c, f),\\(a, c)=(d, e)=(b, f),\\(b, e)=(c, d)=(a, f).\end{gathered}$$

Ainsi, en particulier, on ne changera pas V en y faisant simultanément les deux transpositions (c, e) et (d, f); on aura donc

$$\mathrm{V}=\varphi(a, b, e, f, c, d).$$

Maintenant nous savons que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire

$$\binom{1.2.3.4.5}{2.3.4.5.1}\text{ [*]};$$

on aura donc

$$\mathrm{V}=\varphi(b, e, f, c, a, d).$$

Enfin, comme cette fonction n'est pas changée non plus par la permutation circulaire

$$\binom{2.3.5.4}{3.5.4.2},$$

on aura

$$\mathrm{V} \quad \text{ou} \quad \varphi(a, b, c, d, e, f)=\varphi(b, f, a, e, c, d);$$

on voit donc que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire de six lettres

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & f & a & e & c & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b & f & d & e & c \\ b & f & d & e & c & a \end{pmatrix}.$$

Concluons donc que les fonctions de six lettres qui ont six valeurs, et qui ne sont pas symétriques par rapport à cinq lettres, ne sont pas changées :

---

[*] Nous indiquons par cette notation qu'il faut remplacer les lettres qui occupent les rangs 1, 2, 3, 4, 5, par celles qui occupent les rangs 2, 3, 4, 5, 1.

1°. Par une permutation circulaire de six lettres;

2°. Par une de cinq lettres;

3°. Par une de quatre lettres.

Il résulte aussi de notre analyse que toutes les fonctions de cette espèce sont semblables et peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles et de fonctions symétriques. Nous nous bornerons donc à indiquer la formation d'un type.

Formons les produits deux à deux des six lettres a, b, c, d, e, f, et faisons les sommes des trois produits correspondants aux transpositions équivalentes que nous avons écrites plus haut. On aura les cinq fonctions suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} ad+bc+ef, \\ ab+ce+df, \\ ae+bd+cf, \\ ac+de+bf, \\ be+cd+af; \end{array}\right.$$

or, si l'on applique l'une quelconque des substitutions circulaires

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a & b & f & d & e & c \\ b & f & d & e & c & a \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

aux fonctions (1), on voit qu'elles ne font que s'échanger les unes dans les autres : donc leur produit

$$(ad+bc+ef)(ab+ce+df)(ae+bd+cf)(ac+de+bf)(be+cd+af)$$

ne changera par aucune des substitutions circulaires (2), et, comme il n'est pas symétrique, il a précisément six valeurs.

La somme des expressions (1) est une fonction symétrique; il en est de même de la somme de leurs carrés : mais la somme de leurs cubes ne l'est pas, et peut être prise, aussi bien que le produit précédent, pour type des fonctions que nous considérons.

SUR LES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. L. BOURGOIN.

§ I.

On connaît la loi de formation des *réduites* successives d'une *fraction continue*

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \ldots}}}}}$$

(a, b, c, d, e, etc., représentant des nombres entiers que nous appellerons les *termes* de la fraction continue). On sait que le numérateur de la $p^{ième}$ réduite est une somme de deux parties qui sont : 1° le produit du numérateur de la $(p-1)^{ième}$ réduite par le $p^{ième}$ terme de la fraction continue; 2° le numérateur de la $(p-2)^{ième}$ réduite. Le dénominateur de la $p^{ième}$ réduite est composé de la même manière avec les dénominateurs des deux réduites précédentes et avec le $p^{ième}$ terme de la fraction continue.

Le numérateur et le dénominateur d'une même réduite sont *premiers entre eux;* ils ne peuvent donc être tous deux des nombres *pairs*. Les réduites d'une fraction continue seront toutes comprises dans trois *classes* qui sont : 1° celle des réduites dont le numérateur est *pair* et dont le dénominateur est *impair;* 2° celle des réduites dont le numérateur est *impair* et dont le dénominateur est *pair;* 3° enfin la classe des réduites qui ont le numérateur et le dénominateur tous deux *impairs*.

L'ordre selon lequel se succèdent les termes pairs et impairs d'une

fraction continue, depuis le premier terme jusqu'à celui d'un certain rang, détermine la *classe* à laquelle appartiendra la réduite de ce rang. Cette dépendance se précise en un théorème que nous allons essayer de mettre en évidence.

Nous pouvons soumettre les termes de la fraction continue à trois sortes de *triages;* voici en quoi ces triages consistent :

1°. En parcourant la suite des termes a, b, c, d, e, etc., effaçons le *premier* terme, ou plutôt, affectons-le d'une *marque* distinctive particulière; puis, si le *deuxième* terme est un nombre *pair,* effaçons le *troisième,* ou donnons-lui la même marque arbitraire qu'au *premier;* si le *deuxième* terme est *impair,* avançons dans la suite des termes jusqu'à ce que nous atteignions un nouveau terme *impair,* et donnons au terme *suivant* la marque déjà employée pour le *premier* terme.

2°. Au lieu de débuter ainsi, nous pourrions suivre cette autre règle : Ne *marquons* pas le *premier* terme de la fraction continue; mais, s'il est *pair,* marquons le *deuxième;* si le *premier* est *impair,* avançons dans la suite des termes de la fraction continue jusqu'à ce que nous rencontrions un nouveau terme *impair,* et *marquons* le terme du rang immédiatement plus élevé.

3°. Enfin, nous pourrions débuter d'une troisième manière: Le *premier* terme ne sera point *marqué;* s'il est *impair,* on marquera le *deuxième* terme; si le premier terme est *pair,* on avancera dans la suite des termes jusqu'à ce que l'on rencontre un terme *impair,* et l'on marquera le terme du rang suivant.

Voilà trois procédés bien distincts. Complétons-les par une convention qui se rattache à tous les trois indifféremment; la voici : Quand un terme de la fraction continue se trouve *marqué,* si le terme du rang immédiatement suivant est *pair, marquons* le terme qui vient après celui-ci; si le terme qui suit immédiatement un terme marqué est *impair,* avançons dans la suite des termes de la fraction continue jusqu'à ce que nous rencontrions un nouveau terme *impair,* et *marquons* le terme qui vient après celui-ci.

Afin de nous faire bien comprendre, nous allons appliquer concurremment, à la même succession de termes pairs et impairs, nos trois

procédés de triage. Supposons, par exemple, que les termes d'une fraction continue se succèdent, à partir du premier, de la manière suivante :

1er,	2e,	3e,	4e,	5e,	6e,	7e,	8e,	9e,	10e,	11e,	12e,	13e,	14e,	15e,	16e,	17e,	etc.
impair,	impair,	impair,	impair,	pair,	pair,	impair,	impair,	pair,	impair,	pair,	pair,	impair,	impair,	pair,	impair,	etc.,	etc.

Adoptons, pour *marquer* les termes d'après le premier mode de triage, le caractère D; pour les marquer d'après le deuxième mode de triage, le caractère N; et enfin, pour les marquer d'après le troisième mode de triage, le caractère I. Les termes qui, dans la fraction continue prise pour exemple, recevront la marque D sont ceux dont les rangs ont les numéros

1 » » 4 » 6 » » 9 » » » » 14 » 16 » etc.

Les termes qui recevront la marque N sont ceux dont les rangs ont les numéros

» » 3 » » » » 8 » 10 » 12 » » 15 » » etc.

Enfin, les termes qui recevront la marque I sont ceux dont voici les numéros

» 2 » » 5 » 7 » » » 11 » 13 » » » 17 etc.

Par là, les trois marques distribuées aux termes de la fraction continue se succéderont dans l'ordre suivant :

D, I, N, D, I, D, I, N, D, N, I, N, I, D, N, D, I, etc.

Qu'on nous permette, pour la commodité du langage, d'appeler termes *dénominatoires* les termes de la fraction continue qui reçoivent la marque D; d'appeler termes *numératoires* ceux qui reçoivent la marque N; et enfin, termes *imparitoires* ceux qui prennent la marque I. La suite des termes de la fraction continue peut être regardée comme composée de suites élémentaires qui commencent aux divers termes *dénominatoires ;* chacune de ces suites élémentaires s'appellera une *période dénominatoriale.* On donnera un sens analogue aux locutions *période numératoriale, période imparitoriale.*

La distribution des trois marques D, N, I, aux termes de la fraction continue, suivant nos procédés conventionnels, entraîne certaines conséquences que nous allons signaler.

§ II.

Deux termes absolument consécutifs, par exemple le sixième et le septième termes de la fraction continue, ne sauraient porter la même marque, c'est-à-dire être tous deux *dénominatoires*, ou tous deux *numératoires*, etc.

Un même terme ne saurait cumuler deux marques différentes, par exemple être à la fois numératoire et dénominatoire; car, si cela arrivait, il s'ensuivrait, d'après les procédés même de triage, que le terme numératoire précédent serait aussi dénominatoire; que le terme numératoire anté-précédent serait aussi dénominatoire, et ainsi de suite; et enfin que le premier terme numératoire serait en même temps dénominatoire, ce qui est évidemment impossible.

Aucun terme de la fraction continue ne saurait être exempt de *marque;* autrement parlant, un terme quelconque sera nécessairement, soit *numératoire*, soit *dénominatoire*, soit *imparitoire*. En effet, considérons deux termes absolument consécutifs, et supposons qu'ils ne soient numératoires ni l'un ni l'autre; ils appartiendront à une même période numératoriale, et ni l'un ni l'autre ne sera le premier terme de la période. Supposons, en outre, qu'ils ne soient dénominatoires ni l'un ni l'autre; ils appartiendraient à une même période dénominatoriale, et ils ne la commenceraient ni l'un ni l'autre. En vertu même des procédés de triage, le terme qui commencerait la période numératoriale commencerait aussi la période dénominatoriale, c'est-à-dire cumulerait deux marques, ce qui est impossible. Ainsi, quand deux termes consécutifs ne seront numératoires ni l'un l'autre, l'un des deux sera dénominatoire; quand ils ne seront dénominatoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux sera numératoire. On démontrerait d'une manière analogue que si deux termes consécutifs ne sont numératoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux est imparitoire, et *vice versâ;* que, s'ils ne sont dénominatoires ni l'un ni l'autre, l'un des deux est imparitoire, et *vice versâ*. En résumé, si deux termes consécutifs sont exempts d'une certaine marque, ils doivent se partager les deux autres marques.

Quelles que soient les marques prises par les p premiers termes

d'une fraction continue, on peut toujours, si l'on est maître de faire le $p^{ième}$ terme *pair* ou *impair*, donner au $(p+1)^{ième}$ terme telle marque qu'on voudra, autre que celle du $p^{ième}$ terme, sans que la marque d'aucun des p premiers termes se trouve changée. Observons d'abord que, d'après les procédés même de triage, la marque particulière que prend le terme d'un certain rang ne dépend nullement de la propriété de ce terme d'être pair ou impair; cette marque est déterminée par la manière dont se succèdent les termes pairs et impairs dans les rangs précédents. Supposons, pour fixer les idées, qu'on veuille faire prendre au $(p+1)^{ième}$ terme la marque N. Par hypothèse, le $p^{ième}$ terme a une autre marque. Par la liberté que nous avons de faire ce $p^{ième}$ terme pair ou impair, nous pouvons évidemment obtenir qu'il achève une période numératoriale, et, par là, que le $(p+1)^{ième}$ terme en commence une autre; et ce résultat, nous l'obtiendrons sans aucune altération des marques déjà échues aux p premiers termes.

Écrivons, en les répétant, les trois marques à la suite l'une de l'autre, dans un ordre tout à fait arbitraire, en observant toutefois que cette série de *marques* commence par D et que la même marque ne soit pas écrite deux fois consécutivement. Formons, par exemple, l'arrangement

D, N, I, N, I, D, I, D, N, D, N, I, D, N, I, N, D, etc.

En composant une fraction continue, on sera toujours maître de faire, par un mode de succession convenable des termes pairs et impairs, que les marques résultant, pour ces termes, de ce mode de succession, reproduisent avec fidélité l'arrangement assigné d'avance. L'ordre selon lequel devront se succéder les termes pairs et impairs de la fraction continue est d'ailleurs rigoureusement déterminé par l'arrangement des marques, tel qu'il est imposé.

§ III.

Toute réduite correspondant au terme de la fraction continue qui précède immédiatement un terme *numératoire* est nécessairement une réduite de la première *classe* (§ I). Toute réduite correspondant

au terme qui précède immédiatement un terme *dénominatoire* est de la deuxième *classe*. Toute réduite qui correspond au terme qui précède un terme *imparitoire* appartient à la troisième *classe*.

Vérifions la première de ces trois assertions. On reconnaît avec la plus grande facilité, en consultant la loi de formation des réduites, que, si notre assertion est vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève une certaine période numératoriale, elle est nécessairement vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève la période numératoriale suivante. Ensuite on démontre que cette assertion est vraie pour la réduite correspondant au terme qui achève la *première* période numératoriale. Donc cette première assertion est d'une vérité absolue. Les deux autres assertions se vérifient par un raisonnement analogue. D'ailleurs, en démontrant l'une quelconque de ces trois propositions, on reconnaît que sa réciproque est vraie. Ainsi, quand deux de nos propositions directes sont démontrées, la troisième en est une conséquence nécessaire ainsi que sa réciproque.

Le théorème qui vient d'être énoncé et démontré a des conséquences dignes d'être remarquées. Supposons que la fraction continue ait une infinité de termes, et, par là, une infinité de réduites. Il est impossible qu'à partir d'un certain rang toutes les réduites de rangs supérieurs appartiennent à la même *classe;* ou, pour parler autrement, il est impossible qu'*une seule* des trois classes fournisse une *infinité* de réduites à la fraction continue, les deux autres classes ne fournissant pas de réduites, ou n'en fournissant qu'un *nombre limité*. S'il n'y a que *deux* classes qui fournissent chacune une infinité de réduites, il arrivera nécessairement qu'à partir d'un certain rang les réduites seront alternativement de l'une et de l'autre de ces deux classes. Ainsi les rangs de *numéros impairs* offriront une infinité de réduites de l'une des deux classes et un nombre limité de réduites de l'autre classe. Les rangs *pairs,* au contraire, offriront une infinité de réduites de cette dernière classe et un nombre limité de réduites de l'autre classe.

Pour que l'une des trois classes ne fournisse pas de réduites ou n'en fournisse qu'un nombre limité, il faut et il suffit qu'à partir d'un certain rang les termes de la fraction continue soient tous des nombres

pairs; ou, ce qui revient au même, pour que chacune des trois classes fournisse une *infinité* de réduites à la fraction continue, il faut et il suffit qu'elle ait une *infinité* de termes *impairs*.

Quand la fraction continue a une infinité de termes *impairs*, il peut arriver que *chacune* des *trois* classes fournisse une *infinité* de réduites de rangs *pairs*, et, en outre, une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela arriverait, entre autres cas, si les termes de la fraction continue étaient tous *impairs* à partir d'un certain rang. Il peut arriver qu'*aucune* des trois classes *ne fournisse* à la fois une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela aurait lieu dans le cas particulier où les termes de la fraction continue, à partir d'un certain rang, seraient alternativement *pairs* et *impairs*. Il peut se faire qu'*une seule* des trois classes fournisse à la fois une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*. Cela aurait lieu, par exemple, si les *marques* des termes de la fraction continue revenaient *périodiquement* dans l'arrangement suivant :

D, I, N, I, D, N.

Enfin, il peut arriver que *deux* classes de réduites fournissent chacune une infinité de réduites de rangs *pairs* et une infinité de réduites de rangs *impairs*, mais que la troisième classe n'ait pas cette propriété. Il en serait ainsi, par exemple, si les marques des termes de la fraction continue revenaient périodiquement dans l'ordre suivant :

D, N, I, N, I, D, I, N, I, D, N, D, I, D, I, N, I, N.

OBSERVATIONS

SUR LA THÉORIE DU SON;

Par M. POPOFF,
Professeur à l'Université de Kazan.

§ I.

Réduction des équations générales du mouvement des fluides.

1. La théorie des forces moléculaires a conduit M. Poisson aux équations générales du mouvement des fluides. Pour établir ces équations, on calcule les pressions dans l'intérieur de la masse fluide, d'après les formules données pour les corps solides élastiques, en supposant que l'inégalité des pressions autour de chaque point n'est que momentanée. Dans les cas ordinaires de l'ondulation de fluide, on peut supposer la masse homogène et partout également échauffée et les variations de densité très-petites pendant le mouvement des molécules; en excluant, de plus, le cas des vibrations très-rapides, auxquelles on attribue les phénomènes de la lumière, on trouve [*]

$$
(1) \quad \begin{cases}
\rho\left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \dfrac{d\varpi}{dx} + \beta\left(\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2}\right), \\
\rho\left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \dfrac{d\varpi}{dy} + \beta\left(\dfrac{d^2v}{dx^2} + \dfrac{d^2v}{dy^2} + \dfrac{d^2v}{dz^2}\right), \\
\rho\left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \dfrac{d\varpi}{dz} + \beta\left(\dfrac{d^2w}{dx^2} + \dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{d^2w}{dz^2}\right);
\end{cases}
$$

$$
(2) \quad \begin{cases}
\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{du}{dt} + u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{du}{dy} + w\dfrac{du}{dz}, \\
\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} + u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dv}{dy} + w\dfrac{dv}{dz}, \\
\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dw}{dt} + u\dfrac{dw}{dx} + v\dfrac{dw}{dy} + w\dfrac{dw}{dz};
\end{cases}
$$

$$
(3) \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w;
$$

[*] *Voyez* le *Journal de l'École Polytechnique*, xx^e cahier.

$$(4) \qquad \varpi = p + h\left(\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right);$$

$$(5) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0.$$

Toutes les dérivées, dans les équations (1), (2), (4), (5), sont partielles et prises par rapport aux variables qui sont écrites au dénominateur; x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'une particule du fluide en mouvement; u, v, w les vitesses suivant la direction des axes des coordonnées, au bout du temps t; X, Y, Z les composantes parallèles aux mêmes axes de la force rapportée à l'unité de masse et agissant sur le point matériel (x, y, z); p la pression et ρ la densité au même point; β et h des constantes qui dépendent de la nature du fluide. On ajoute l'équation (5) comme une condition particulière qui exprime que la masse du fluide reste continue pendant le mouvement. Au lieu de l'équation (4), M. Poisson donne la suivante

$$[4] \qquad \varpi = p - \alpha\frac{\mathrm{d}p}{dt} - 2\alpha\frac{k\,\mathrm{d}\rho}{\rho\,dt},$$

où les différentielles $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}\rho$ se rapportent à toutes les variables qui dépendent de t. Les valeurs des constantes α, k, β se déterminent au moyen des équations suivantes:

$$\alpha = \int_0^\infty \varphi t.dt, \quad \beta = \alpha(k + \mathrm{K}),$$

$$\mathrm{K} = p = \frac{1}{6\varepsilon^3}\sum rfr, \quad k = \frac{1}{30\varepsilon^3}\sum r^3\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},$$

les sommes s'étendant à toutes les molécules qui entourent le point (x, y, z) et dont la position est déterminée par les coordonnées x', y', z' relatives à ce même point. La fonction φt est égale à l'unité pour $t = 0$, elle varie très-rapidement et devient nulle ou insensible pour les valeurs de t tant soit peu sensibles. La fonction fr représente la force moléculaire, ou l'action mutuelle des deux molécules M et M' situées à la distance r; cette fonction étant positive ou négative, selon que la force sera répulsive ou attractive et n'ayant d'ailleurs des valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de r. Enfin, on désigne par ε l'intervalle moyen des molécules autour du point M. Toutes ces quantités, aussi bien que les équations précédentes, se

rapportent au temps t. Les quantités α, β, k devraient être regardées comme des fonctions de x, y, z, t; mais nous les supposerons constantes, vu que les dilatations ou les contractions du fluide et les vitesses des molécules sont très-petites. Les sommes désignées par k et K ne se réduisent pas à des intégrales, parce que la fonction fr, dans les limites de la sommation, peut changer plusieurs fois de signe. Nous ajouterons à cette remarque importante de M. Poisson, que pour les fluides aériformes, où la fonction fr représente constamment la force répulsive, la réduction des sommes précédentes à des intégrales est aussi inadmissible. Pour démontrer notre assertion, nous désignerons par θ l'angle que fait l'axe des z avec le rayon vecteur r mené du point (x, y, z), et par ψ l'angle de la projection de r sur le plan (x, y) avec l'axe des x, ce qui nous donnera

$$z' = r\cos\theta, \quad y' = r\sin\theta\sin\psi, \quad x' = r\sin\theta\cos\psi.$$

Décrivons maintenant du point M comme centre, et avec le rayon r, une surface sphérique, et partageons cette surface en un très-grand nombre de petits éléments ds, nous aurons

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

En supposant que les sommes K et k soient réductibles à des intégrales, la fonction fr pour les molécules situées à la surface ds sera constante, et la valeur de la somme $\sum rfr$, étendue à toutes ces molécules, sera proportionnelle à leur nombre, c'est-à-dire à $\frac{ds}{\varepsilon^2}$. On trouve de cette manière

$$\mathrm{K} = \frac{1}{6\varepsilon^4}\int_0^\infty dr . \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 fr \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{2\pi}{3\varepsilon^4}\int_0^\infty r^3 fr \, dr,$$

$$k = \frac{1}{30\varepsilon^4}\int_0^\infty dr . \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^5 \frac{d\left(\frac{1}{r} fr\right)}{dr} \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{2\pi}{15\varepsilon^4}\int_0^\infty r^5 d.\frac{1}{r} fr,$$

d'où l'on tire

$$k = -\mathrm{K},$$

et, par suite,

$$\beta = 0.$$

La réduction des sommes K et k à des intégrales fait donc disparaître

les termes essentiels dans les équations (1). Pour montrer maintenant l'identité des équations (4) et [4], nous observons d'abord que la fonction φt et la quantité α dans tous les cas peuvent être supposées positives, de sorte qu'il est superflu d'attribuer à la fonction φt la généralité des valeurs que M. Poisson lui suppose. (*Journal de l'École Polytechnique,* xx^e cahier, page 148.) De plus, pour les liquides, M. Poisson trouve (Mémoire déjà cité, page 159)

$$\frac{k\,d\rho}{\rho dt} = -\frac{3}{5}\frac{dp}{dt},$$

et, par suite, l'équation [4] revient à

$$\varpi = p + \frac{\alpha}{5}\frac{dp}{dt},$$

ce qui est identique avec l'équation (4), en y supposant h essentiellement positive.

Pour les fluides aériformes, il existe l'équation

$$\frac{d\rho}{\rho dt} = \gamma \frac{dp}{pdt}, \tag{6}$$

où γ désigne le rapport de la chaleur spécifique sous une pression constante, à la chaleur spécifique sous un volume constant : par suite, l'équation [4] revient à

$$\varpi = p - \alpha\frac{dp}{dt}\left(1 + \frac{2\gamma . k}{p}\right),$$

ce qui est de nouveau identique avec l'équation (4), en y supposant

$$h = -\alpha\left(1 + \frac{2\gamma . k}{p}\right).$$

Mais à présent il n'est pas facile de voir si la constante h est positive ou négative.

A la vérité, des expressions pour k et K l'on tire

$$k = -\frac{1}{5}p + \frac{1}{30\varepsilon^3}\sum r^3 f'(r),$$

et, par suite,

$$\left(1 + \frac{2\gamma . k}{p}\right) = 1 - \frac{2}{5}\gamma\left[1 - \frac{\sum r^3 f'(r)}{\sum rfr}\right].$$

La condition de h positive se réduit donc à

$$1 - \frac{\sum r^2 f'(r)}{\sum rfr} > \frac{5}{27},$$

ce qui est très-difficile à résoudre sans connaître la forme de la fonction fr. Néanmoins, si la réduction des sommes k et K à des intégrales peut être admise pour les corps aériformes comme première approximation, on aura aussi

$$k = -\mathrm{K} = -p,$$

et, par suite,

$$h > 0.$$

2. Pour intégrer les équations (1), (2), (3), (4), (5), il faut établir une relation entre la densité et la pression. En raisonnant sur cette relation, on observe une différence essentielle entre le cas du mouvement des corps solides et celui des corps fluides. Pour les corps solides élastiques, la position de chaque point matériel pendant le mouvement est toujours déterminée en fonction des coordonnées initiales de ce point; pour les fluides, cet expédient ne présenterait pas le même avantage, puisque dans le mouvement de ces corps l'arrangement des particules autour de chaque point change avec sa position dans l'espace. Ainsi les quantités p et ρ doivent être exprimées en fonctions des coordonnées du point de l'espace où la particule arrive au bout du temps t; de sorte que ces fonctions contiendront en partie les expressions de p et ρ, qui appartient à ce point pendant l'équilibre du fluide. Pour des températures assez éloignées de l'ébullition et de la congélation, on admet la compression des liquides proportionnelle à l'accroissement de pression. Pour les corps aériformes, du moins pour les pressions possibles à l'air libre, cette loi est bien démontrée: on peut donc poser, en général, pour un fluide en équilibre,

$$(7) \qquad d\rho' = \eta\, dp',$$

où ρ' désigne la densité du fluide et p' la pression correspondante; la constante η est la compression produite par une atmosphère. D'un autre côté, en faisant, dans les équations (1),

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0,$$

on obtient, pour l'état d'équilibre,

$$\rho' \mathrm{X} = \frac{dp'}{dx}, \quad \rho' \mathrm{Y} = \frac{dp'}{dy}, \quad \rho' \mathrm{Z} = \frac{dp'}{dz}.$$

Ces conditions étant combinées avec l'équation (7) donneront

(8) $$\rho' = \mathrm{D}e^{n\zeta},$$

(9) $$p' = \frac{\mathrm{D}}{n} e^{n\zeta} + \mathrm{H},$$

où

$$\zeta = \int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

D est la densité du fluide pour $\zeta = 0$, e la base des logarithmes népériens, H la constante introduite par l'intégration. En ne considérant que le mouvement ondulatoire où les molécules d'un fluide s'écartent très-peu de leur position d'équilibre, il suffit de supposer

(10) $$\rho = \rho'(1 - s),$$

s désignant une fonction de x, y, z, t inconnue, mais dont la valeur est toujours très-petite. En même temps, on peut admettre

(11) $$p = p' - \frac{\lambda}{n} \rho' s,$$

où λ est une constante. Cette équation suppose la variation de l'élasticité au point (x, y, z) proportionnelle à la compression ou à la dilatation au même point. Nous exprimons cette proportionnalité par $\frac{\lambda}{n}$ et non par $\frac{1}{n}$, comme cela a été fait dans l'équation (7). Pour justifier l'expression (11), il suffit de remarquer qu'elle résulte de l'équation (6), qui est vraie même pour des variations très-rapides de la densité, et qui nous donne

$$\rho = \left(\frac{p}{\mathrm{A}}\right)^{\gamma},$$

A étant la constante de l'intégration. En y substituant l'expression de ρ donnée par l'équation (10) et négligeant les termes proportionnels au carré et aux puissances supérieures de s, on aura

$$p = (\rho')^{\frac{1}{\gamma} - 1} \left(\mathrm{A}\rho' - \frac{\mathrm{A}}{\gamma} \rho' s\right).$$

Le coefficient $(\rho')^{\frac{1}{\gamma} - 1}$, ou, ce qui est la même chose, $e^{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)n\zeta}$, peut

être regardé comme une quantité constante; par suite, on retombera sur l'équation (11).

3. Dans la théorie de l'ondulation des liquides et des fluides aériformes, on suppose ordinairement les vitesses u, v, w et leurs dérivées partielles très-petites, et c'est pourquoi on néglige les carrés et les produits de ces quantités. Admettant cette supposition et substituant dans les équations (1), (4), (5) les valeurs de ρ et p données par les équations (10) et (11), on aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\lambda}{n}\left(\frac{ds}{dx} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dx}}{dt}\right) - s\mathrm{X} + \lambda\mathrm{X}\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\lambda}{n}\left(\frac{ds}{dy} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dy}}{dt}\right) - s\mathrm{Y} + \lambda\mathrm{Y}\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right), \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\lambda}{n}\left(\frac{ds}{dz} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dz}}{dt}\right) - s\mathrm{Z} + \lambda\mathrm{Z}\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \eta(u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z}),$$

où l'on peut considérer la quantité ρ' comme constante. Dans les cas ordinaires de la théorie des ondes, il suffit de supposer

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = g,$$

en désignant par g l'intensité de la pesanteur qui agit dans la direction de l'axe positif des Z. Si l'on rejette les termes proportionnels à la quantité β et qu'on remplace la fonction s par une autre fonction φ, telle que

$$(14)\qquad s = \varphi e^{-g\eta z},$$

ou aura, au lieu des équations (12) et (13), les suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dx} + h\,\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dt}\right)e^{-g\eta z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dy} + h\,\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dy}}{dt}\right)e^{-g\eta z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dz} + h\,\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dz}}{dt}\right)e^{-g\eta z} - g\varphi e^{-g\eta z}; \end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \frac{d\varphi}{dt} = e^{g\eta z}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \eta g w\right).$$

Enfin, si l'on différentie les équations (15) et (16) par rapport à x, y, z, t, et qu'on les ajoute, il en résultera

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\,\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \\ &\qquad + \frac{h\lambda}{\eta}\left(\frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt} + \frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt} + \frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

et, au lieu des équations (10) et (11), on aura

$$\rho = \rho' - \Delta, \quad p = p' - \frac{\lambda}{\eta}\,\Delta,$$

où l'on fait

$$\Delta = \rho'\varphi e^{-g\eta z}.$$

§ II.

Sur la propagation des ondes dans une atmosphère indéfinie.

1. Dans ce paragraphe, nous supposerons les forces X, Y, Z égales à zéro, afin que la densité du fluide dans son état d'équilibre soit constante. De plus, nous négligerons, dans les équations (12), les termes proportionnels à la quantité β, soit qu'on supposera les différences $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc., des quantités très-petites du second ordre, ou qu'on admettra par approximation $\beta = 0$. Il s'agit donc d'intégrer les

équations aux différences partielles

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= n^2\frac{ds}{dx} + \varkappa\,\frac{d.\frac{ds}{dx}}{dt},\\ \frac{dv}{dt} &= n^2\frac{ds}{dy} + \varkappa\,\frac{d.\frac{ds}{dy}}{dt};\\ \frac{dw}{dt} &= n^2\frac{ds}{dz} + \varkappa\,\frac{d.\frac{ds}{dz}}{dt},\end{aligned}\right.$$

$$(b)\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

où l'on a fait

$$n^2 = \frac{\lambda}{\eta},\qquad \varkappa = \frac{h\lambda}{\eta}.$$

Mais, par une combinaison toute simple des équations (a) et (b), on déduit encore celle-ci,

$$(1)\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = n^2\left(\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}\right) + \varkappa\left(\frac{d.\frac{d^2s}{dx^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2s}{dy^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2s}{dz^2}}{dt}\right).$$

On n'a donc qu'à intégrer cette équation (1), et mettre ensuite la valeur trouvée de s dans les équations (a) pour déterminer, au moyen d'une intégration, les valeurs de u, v, w, de maniere que leurs expressions deviennent des fonctions arbitraires pour $t = 0$:

$$(2)\qquad u_0 = \psi(x, y, z),\quad v_0 = \varphi(x, y, z),\quad w_0 = \chi(x, y, z).$$

Il faut y ajouter encore une quatrième fonction arbitraire pour exprimer la valeur de s, correspondante à $t = 0$, et que nous exprimerons ainsi:

$$(3)\qquad s_0 = \mathrm{F}(x, y, z).$$

Quant à la quantité $\frac{ds}{dt}$, pour $t = 0$, on a

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy} + \frac{dw_0}{dz}.$$

On satisfait à l'équation (1) en posant

$$s = \sum\left(\mathrm{A}e^{\xi' t} + \mathrm{B}e^{\xi'' t}\right)\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos c(z-\gamma),$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, A, B étant des constantes arbitraires, dont les deux dernières peuvent être considérées comme des fonctions arbitraires des autres; ξ' et ξ'' sont les racines de l'équation

$$\xi^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(\varkappa\xi + n^2) = 0.$$

Si l'on néglige le carré et les puissances supérieures de la quantité $\varkappa$, et que l'on pose

$$\mu^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

on aura

$$\xi' = -\frac{\varkappa\mu^2}{2} + n\mu\sqrt{-1},$$

$$\xi'' = -\frac{\varkappa\mu^2}{2} - n\mu\sqrt{-1};$$

par conséquent,

$$s = \sum e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}(\mathrm{A}\cos n\mu t + \mathrm{B}\sin n\mu t)\,\mathrm{Q},$$

où l'on a fait

$$\mathrm{Q} = \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos c(z-\gamma),$$

et où l'on a écrit A et B au lieu de A + B et de $(\mathrm{A} - \mathrm{B})\sqrt{-1}$.

Les sommes se rapportent aux constantes arbitraires, et, pour une masse indéfinie, elles peuvent être remplacées par les intégrales

$$s = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,(\mathrm{A}\cos n\mu t + \mathrm{B}\sin n\mu t)\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}.$$

Enfin, si l'on détermine A et B de manière à satisfaire aux équations (2), (3), (4), et qu'on écrive, pour abréger, un seul signe d'intégration, on aura

$$s = \frac{1}{\pi^3}\int \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\left(\cos n\mu t + \frac{\varkappa\mu^2}{2}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\right)\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},$$

$$+\frac{d}{dx}\int\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},$$

$$+\frac{d}{dy}\int\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},$$

$$+\frac{d}{dz}\int\frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}.$$

2. Occupons-nous maintenant de la réduction de l'intégrale

$$\iiiint\!\!\iint \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3} e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t} \frac{\sin n\mu t}{n\mu} \cdot \mathrm{Q}\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}} = \mathrm{X}.$$

Les indéterminées a, b, c peuvent être regardées comme trois coordonnées indépendantes; en les changeant en trois autres, μ, θ, ω, telles, que $a = \mu\cos\theta$, $b = \mu\sin\theta\sin\omega$, $c = \mu\sin\theta\cos\omega$, nous aurons

$$\mathrm{X} = \iiiint\!\!\iint \frac{\psi(a,\beta,\gamma)}{8\pi^2} e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t} \frac{\sin n\mu t}{n\mu} \cos\mu\mathrm{R}\, \sin\theta\,\mu^2\, \overset{\infty}{\underset{0}{d\mu}}\, \overset{\pi}{\underset{0}{d\theta}}\, \overset{2\pi}{\underset{0}{d\omega}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathrm{R} = (x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta\sin\omega + (z-\gamma)\sin\theta\cos\omega.$$

Mais, d'après les formules connues, on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\mu\mathrm{R}\,\sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi\sin\mu\rho}{\mu\rho},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\sin n\mu t\,\sin\mu\rho\, d\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{\kappa t}}\cdot e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}\right).$$

en posant, pour abréger, $\rho^2 = (x-\alpha)^3 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$; par conséquent,

$$(\mathrm{X})\quad \mathrm{X} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}} \iiint \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Les termes qui contiennent les fonctions φ et χ admettent des réductions pareilles, de sorte que si l'on fait, pour abréger,

$$(\mathrm{Y})\quad \mathrm{Y} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}} \iiint \frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$(\mathrm{Z})\quad \mathrm{Z} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}} \iiint \frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$(\mathrm{T})\quad \mathrm{T} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}} \iiint \frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$\mathrm{T}' = \iiiint\!\!\iint \frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3} e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t} \frac{\sin n\mu t}{n\mu}\, \mathrm{Q}\, da\, db\, dc\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

on aura

$$(s) \qquad s = \frac{dT}{dt} - 2\frac{dT'}{dt'} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$

où l'on fera $t' = t$ après avoir exécuté la différentiation sur la fonction T'. Cette fonction T' donnera, après la réduction,

$$(\mathrm{T}') \quad \mathrm{T}' = \frac{e^{-\frac{n^2 t^2}{2\varkappa t'}}}{2n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t'}} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t'}} \left(e^{\frac{n\rho t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{n\rho t}{\varkappa t'}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

en observant que

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t'} \sin n\mu t \sin \mu\rho\, d\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa t'}}\, e^{-\frac{n^2 t^2}{2\varkappa t'} - \frac{\rho^2}{2\varkappa t'}} \left(e^{\frac{n\rho t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{n\rho t'}{\varkappa t'}}\right).$$

Si les fonctions $\mathrm{F}(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ sont développables en série de Taylor, il est facile de réduire les expressions de X, Y, Z, T aux intégrales doubles. Nous allons exécuter les calculs pour la fonction T. En posant

$$\alpha = x + \rho\cos p, \quad \beta = y + \rho \sin p \sin q, \quad \gamma = z + \rho \sin p \cos q,$$

on aura

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \rho^2 \sin p\, d\rho\, dp\, dq,$$

$$\mathrm{T} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}} \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{F}(x+\rho\cos p,\ y+\rho\sin p\sin q,\ z+\rho\sin p\cos q)\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) \rho \sin p \, d\rho_0^{\infty}\, dp_0^{\pi}\, dq_0^{2\pi}.$$

La fonction sous le signe d'intégration est formée de deux termes différents T_1 et T_2, dont le premier contient la fonction exponentielle $e^{\frac{\rho n}{\varkappa}}$, et le second la fonction $e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}$, de sorte que

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2.$$

En posant pour le premier terme,

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t},$$

ce qui donnera

$$\omega = -a \text{ pour } \rho = 0, \quad a = \frac{nt}{\sqrt{2\varkappa t}},$$

$$\omega = \infty \quad \text{pour } \rho = \infty,$$

nous aurons

$$T_1 = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq$$
$$- \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-a} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq,$$

où l'on a fait

$$\Psi = F(x + \rho \cos p, \quad y + \rho \sin p \sin q, \quad z + \rho \sin p \cos q).$$

Mais, en vertu des limites de l'intégration par rapport à p et q, on peut, dans la fonction Ψ, poser $-\rho$ au lieu de ρ; après quoi l'expression de T_2 se déduira de T_1 par le changement de la limite $\omega = \infty$ en $\omega = -\infty$; par conséquent,

$$T_2 = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq$$
$$- \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-a} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq,$$

et, définitivement,

$$(5) \quad T = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(x + \rho \cos p,\; y + \rho \sin p \sin q,\; z + \rho \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

en faisant

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t}.$$

Si l'on développe la fonction F en série de Taylor, suivant les puissances de la quantité $\omega\sqrt{2\varkappa t}$, et qu'on pose, pour abréger,

$$L = F(x + nt \cos p, \quad y + nt \sin p \sin q, \quad z + nt \sin p \cos q),$$

on aura

$$(6)\, T = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} tL \sin p\, dp\, dq + \frac{\varkappa}{8\pi n^2} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \left(\frac{dL}{dt}\right) \sin p\, dp\, dq,$$

en négligeant les termes proportionnels au carré de la quantité $\varkappa$, et en ayant égard aux formules

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n}\, d\omega = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n+1}\, d\omega = 0.$$

Les fonctions X, Y, Z admettent aussi une pareille réduction; T' se

déduit de T par le changement de $\varkappa$ en $\frac{\varkappa t'}{t}$, par conséquent,

$$(7)\quad T' = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho' d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(x + \rho' \cos p,\ y + \rho' \sin p \sin q,\ z + \rho' \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

où

$$\rho' = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t'}.$$

De plus, le développement de la fonction F suivant les puissances de $\omega\sqrt{2\varkappa t'}$, donnera

$$T' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t \mathrm{L} \sin p\, dp\, dq + \frac{\varkappa t'}{8\pi n^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \left(\frac{d\mathrm{L}}{dt}\right) \sin p\, dp\, dq\,;$$

par conséquent,

$$(8)\qquad \left(\frac{dT'}{dt'}\right) = \frac{\varkappa}{8\pi n^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \left(\frac{d\mathrm{L}}{dt}\right) \sin p\, dp\, dq.$$

3. Ainsi nous avons réduit les intégrales des équations (a) et (b) aux suivantes :

$$s = \frac{dT}{dt} - 2\frac{dT'}{dt'} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$

$$u = \psi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \left(\frac{ds}{dx} + h \frac{d \cdot \frac{ds}{dx}}{dt}\right) dt,$$

$$v = \varphi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \left(\frac{ds}{dy} + h \frac{d \cdot \frac{ds}{dy}}{dt}\right) dt,$$

$$w = \chi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \left(\frac{ds}{dz} + h \frac{d \cdot \frac{ds}{dz}}{dt}\right) dt,$$

où les valeurs des X, Y, Z, T, T' sont données par les formules (X), (Y), (Z), (T), (T'). L'expression pour X, par exemple, sera

$$X = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}} \iiint \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

en posant

$$\rho^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

ou, sous cette autre forme,

$$X = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + \rho \cos p,\ y + \rho \sin p \sin q,\ z + \rho \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

en posant

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t}.$$

De même, l'expression de T' sera

$$T' = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(x + \rho' \cos p,\ y + \rho' \sin p \sin q,\ z + \rho' \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

où

$$\rho' = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t'}.$$

Il est facile de vérifier que les expressions de s, u, v, w, pour $t = 0$, sont identiques avec les fonctions arbitraires données.

En faisant, en effet, $t = 0$, on aura $X = 0$,

$$\frac{dX}{dt} = \psi(x, y, z)$$

$$+ \frac{1}{8n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega \sqrt{\frac{2\varkappa}{t}}\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + \rho \cos p,\ y + \rho \sin p \sin q,\ z + \rho \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq;$$

et si l'on remplace dans le dernier terme ω par $\omega\sqrt{t}$, on obtiendra

$$\frac{dX}{dt} = \psi(x, y, z).$$

On trouve de la même manière

$$\frac{dT'}{dt'} = 0, \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

de sorte que les équations

$$s_0 = F(x, y, z), \quad u_0 = \psi(x, y, z), \quad v_0 = \varphi(x, y, z), \quad w_0 = \chi(x, y, z),$$

et les équations (4) sont satisfaites.

Les fonctions F, ψ, φ, χ peuvent être continues ou discontinues, mais elles restent finies pour des valeurs finies de x, y, z et s'anéantissent pour

$$x = \pm\infty, \quad y = \pm\infty, \quad z = \pm\infty.$$

Quand ces fonctions ne sont différentes de zéro que pour les valeurs très-petites des variables; alors, dans les expressions des X, Y, Z,

T, T′ pour un point (x, y, z) très-éloigné de l'origine des coordonnées, on pourra poser

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et, par suite,

$$(9) \qquad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{B}e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r^2}{2\varkappa t}}}{\sqrt{t}},$$

où B représente une fonction de x, y, z, qui ne dépend pas de t. On conclut de l'équation (9) que la fonction X varie, suivant la même loi, pour tous les points (x, y, z) qui sont également éloignés de l'origine des coordonnées, et qu'elle a des valeurs réelles pour tous les points de la masse indéfinie, quelque petit que soit t.

En observant que

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{\mathrm{X}}{2\varkappa t^2}(r^2 - n^2 t^2 - \varkappa t),$$

nous aurons, pour déterminer le temps t correspondant à la valeur maximum de X,

$$n^2 t^2 + \varkappa t - r^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités proportionnelles au carré de $\varkappa$,

$$(10) \qquad r = nt + \frac{\varkappa}{2n}.$$

Les mêmes conclusions se rapportent aussi aux fonctions Y, Z. Observons encore qu'en posant $\rho = r$, et changeant t' en θ, on pourra écrire, au lieu de l'équation (T′), celle-ci :

$$\mathrm{T}' = \frac{\mathrm{A}e^{-\frac{\alpha}{\theta}}}{\sqrt{\theta}} - \frac{\mathrm{A}e^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\sqrt{\theta}},$$

où l'on a fait

$$\alpha = \frac{n^2 t^2}{2\varkappa} + \frac{r^2}{2\varkappa} - \frac{nrt}{\varkappa},$$

$$\beta = \frac{n^2 t^2}{2\varkappa} + \frac{r^2}{2\varkappa} + \frac{nrt}{\varkappa},$$

$$\mathrm{A} = \iiint \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma)}{4n\pi\sqrt{2\varkappa\pi}} \cdot \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{t}.$$

En différentiant cette formule, nous aurons

$$\frac{dT'}{d\theta} = \frac{Ae^{-\frac{\alpha}{\theta}}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta}\right) - \frac{Ae^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\beta}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta}\right),$$

et si l'on fait $\theta = t$, comme l'exige l'équation (s), on a

$$\frac{dT'}{d\theta} = \frac{A\varepsilon}{2\varkappa t^2\sqrt{t}}(n^2t^2 + r^2 - \varkappa t)\,\psi r - \frac{A\varepsilon}{\varkappa t\sqrt{t}}\cdot nr\varphi r,$$

en faisant, pour abréger,

$$\psi r = e^{\frac{nr}{\varkappa}} - e^{-\frac{nr}{\varkappa}},\quad \varphi r = e^{\frac{nr}{\varkappa}} + e^{-\frac{nr}{\varkappa}},\quad \varepsilon = e^{-\frac{n^2t}{2\varkappa} - \frac{r^2}{2\varkappa t}}.$$

En différentiant de nouveau par rapport à t, on a

$$\frac{d\frac{dT'}{d\theta}}{dt} = \frac{A\varepsilon}{2\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\frac{nr}{\varkappa}\varphi r + (n^2t^2 - r^2)\,\psi r - \psi r(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\frac{(n^2t^2 + r^2 - \varkappa t)}{2\varkappa t}\right].$$

Mais la différentiation immédiate nous donnera aussi

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{A\varepsilon}{2\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[\psi r(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\left(\frac{n^2t^2 - r^2 + \varkappa t}{2\varkappa t}\right) - \psi r(n^2t^2 + r^2)\right];$$

par conséquent, la condition du maximum de la fonction

$$\frac{dT}{dt} - 2\frac{dT'}{dt},$$

qui est égale à

$$\frac{A\varepsilon\psi r}{2\varkappa t^2\sqrt{t}}\left(\varkappa t - 3n^2t^2 - r^2 + 4nt\frac{r\varphi r}{\psi r}\right),$$

sera

$$\left(r^2 - 4nt\frac{r\varphi r}{\psi r} + 3n^2t^2 - \varkappa t\right)(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t) + 2\varkappa t(r^2 - 3n^2t^2) = 0.$$

Pour $\varkappa = 0$, cette équation donnera deux racines positives $r = nt$ et $r = 3nt$. Ayant admis la première de ces racines, nous poserons, pour la seconde approximation,

$$r = nt + \frac{\alpha}{2nt},$$

et, en observant que

$$\frac{\psi r}{\varphi r} = 4\varkappa \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(2nr\theta)d\theta}{e^{\pi\varkappa\theta} - e^{-\pi\varkappa\theta}},$$

ou, si l'on néglige les termes proportionnels à $\varkappa^2$,

$$\frac{\psi r}{\varphi r} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2nru)}{u}\,du = 1,$$

on aura

$$\left(\frac{\alpha^2}{4n^2t^2} - 3\varkappa t\right)^2 - \alpha^2 + 2\varkappa t . 2n^2t^2 - 6\varkappa^2t^2 = 0;$$

par suite, la relation définitive entre r et t sera

$$(11) \qquad r = nt \pm \sqrt{\varkappa t},$$

en négligeant les termes très-petits du second ordre. Nous ne discuterons pas l'autre racine de l'équation précédente, parce que l'expérience n'a pas prouvé, jusqu'à présent, l'existence d'une onde sonore donée de la vitesse $3n$. Il est donc démontré, par l'analyse précédente, que, dans une atmosphère élastique et indéfinie, le mouvement ondulatoire commence aussitôt pour tous les points de la masse, quelque petit que soit le rayon de l'onde initiale. Mais la variation de la densité et les vitesses, étant insensibles en dehors de l'onde initiale pour les premiers instants du mouvement, acquièrent des valeurs *maxima* après un intervalle déterminé du temps, et s'annulent peu à peu après cette époque. La propagation de l'onde douée de la plus grande variation de densité dépend des causes initiales d'ébranlement. Si les vitesses initiales sont communiquées immédiatement à quelques molécules du milieu, sans que la densité de ce milieu ait subi une variation quelconque, l'expression de s ne renfermera que les fonctions X, Y, Z. Dans ce cas, la propagation de l'onde sera uniforme, mais l'expression de l'espace parcouru contiendra un terme constant et proportionnel à la quantité $\varkappa$, qui, étant déterminée par l'expérience, donnera la valeur de la constante h introduite dans les équations générales (a) et (b). Si l'ondulation est produite par une variation de la densité dans quelques endroits de l'atmosphère, et si les vitesses initiales des molécules sont nulles, il y aura deux ondes à *maximum* de la variation de

densité : la première se propagera avec une vitesse qui croît proportionnellement à la racine carrée du temps; la seconde se propagera avec une vitesse décroissante dans la même raison, de sorte qu'au bout du temps t ces deux ondes s'éloigneront à la distance $2\sqrt{\varkappa t}$. Mais cette distance, aussi bien que la valeur de la fonction même

$$\frac{dT}{dt} - 2\frac{dT'}{dt'},$$

diminuent indéfiniment avec la quantité $\varkappa$, et deviennent égales à zéro pour $\varkappa = 0$. Donc, pour les points qui sont très-éloignés de l'onde initiale, la fonction $F(x, y, z)$ ne contribue pour rien à la variation de la densité; de sorte qu'il restera

$$s = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}.$$

Nous avons vu que les fonctions X, Y, Z, T, T' s'expriment par des intégrales définies triples. Le même nombre de signes intégrals entrera dans l'expression de s, tandis que u, v, w s'exprimeront par des intégrales quadruples.

En supposant $\varkappa = 0$, on obtiendra

$$u = \psi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dx}\, dt,$$

$$v = \varphi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dy}\, dt,$$

$$w = \chi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dz}\, dt;$$

$$s = \frac{d.}{dt}\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x + nt\cos p,\ y + nt\sin p\sin q,\ z + nt\sin p\cos q)\, t\sin p\, dp\, dq$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + nt\cos p,\ y + nt\sin p\sin q,\ z + nt\sin p\cos q)\, t\sin p\, dp\, dq,$$

où, en place de

$$\frac{d\psi(x, y, z)}{dx} + \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} + \frac{d\chi(x, y, z)}{dz},$$

on a écrit, pour abréger, $\Psi(x, y, z)$. Ces équations sont identiques

avec celles que M. Poisson a données dans les *Mémoires de l'Institut* (tome X).

4. La supposition $\rho = r$, que nous avons admise pour simplifier les expressions de X, Y, Z, T, T', réduit l'onde initiale à une sphère très-petite, ou, pour ainsi dire, à un point; c'est par cette raison que les termes dépendants des dimensions de l'onde initiale ne sont pas entrés dans les équations (10) et (11). Pour conserver ces termes, il faut transformer les expressions citées de X, Y, Z, T, T' de manière que la position de l'onde initiale soit déterminée relativement au point (x, y, z). Transportons l'origine des coordonnées dans ce point et remplaçons les coordonnées rectilignes par les coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned}\alpha &= x + \rho\cos p,\\ \beta &= y + \rho\sin p\sin q,\\ \gamma &= z + \rho\sin p\cos q,\end{aligned}$$

où p désigne l'angle que fait l'axe des x avec la ligne ρ menée du point (x, y, z) au point (α, β, γ), q est l'angle formé par la projection de ρ sur le plan (yz) avec l'axe des z. Passons à un autre système d'axes rectangulaires, et désignons par a, a_1, a_2 les cosinus des angles que le nouvel axe des x fait avec les axes initiaux; b, b_1, b_2 et c, c_1, c_2 ont des valeurs correspondantes pour les nouveaux axes des y et des z; soient de même p' et q' les nouveaux angles polaires, on aura

$$\begin{aligned}\cos p &= a\cos p' + b\sin p'\sin q' + c\sin p'\cos q',\\ \sin p\sin q &= a_1\cos p' + b_1\sin p'\sin q' + c_1\sin p'\cos q',\\ \sin p\cos q &= a_2\cos p' + b_2\sin p'\sin q' + c_2\sin p'\cos q',\\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma &= \rho^2\sin p'\, dp'\, dq'\, d\rho.\end{aligned}$$

L'intégrale X prendra la forme suivante :

$$X = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varepsilon}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varepsilon t}}\int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varepsilon t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\rho n}{\varepsilon}}\right)\rho\, d\rho\int_0^{2\pi} dq'\int_0^{\varpi}\varphi(x + \rho\cos p,\ y + \rho\sin p\sin q,\ z + \rho\sin p\cos q)\sin p'\, dp'$$

où ϖ désigne la plus grande valeur de p'; r_1 et r_2 sont la plus grande

et la plus petite valeurs de ρ, pour lesquelles la fonction φ n'est pas nulle. La fonction $e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}.\,\rho$ ne change pas de signe entre les limites d'intégration, par conséquent,

$$X = \frac{M e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{\sqrt{t}} \int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \rho\, d\rho,$$

où M représente la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{4 n\varkappa\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa}} \int_0^{2\pi} dq' \int_0^{\pi} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}} \right) \varphi(x + \rho\cos p,\ y + \rho \sin p \sin q,\ z + \rho \sin p \cos q) \sin p'\, dp',$$

pour la valeur moyenne de ρ entre r_1 et r_2. De plus, comme

$$\int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \rho\, d\rho = \varkappa t \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} \right],$$

on aura l'équation

$$\text{(M)} \qquad X = \varkappa M \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} \right] e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}} \sqrt{t},$$

et sa différentielle

$$\frac{dX}{dt} = \frac{M e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{2t\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} (r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} (r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) \right],$$

d'ou l'on tire, pour la valeur maximum de la fonction X, la condition suivante :

$$(12) \qquad e^{\frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{2\varkappa t}} = 1 + \frac{2\varepsilon r_1 + \varepsilon^2}{r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t},$$

où

$$r_2 = r_1 + \varepsilon,$$

ce qui est identique avec l'équation (10), si l'on néglige les quantités proportionnelles au carré de ε. En retenant les quatre premiers termes du développement de la fonction exponentielle dans l'équation précédente, et supprimant le signe de r_1, nous aurons

$$2\varkappa t = r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t + \frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{4\varkappa t}(r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + \frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{2\varkappa t}\left(\frac{r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t}{6}\right);$$

et si, dans les termes ajoutés, on pose, par approximation,

$$r^2 = n^2 t^2 + \varkappa t,$$

on obtiendra

$$(\varepsilon) \qquad r = nt + \frac{\varkappa}{2n} - \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon^2 \left(\frac{n}{6\varkappa} + \frac{1}{3nt} \right),$$

ce qui nous conduit de nouveau à un mouvement uniforme de l'onde, du moins pour des valeurs de t très-considérables. Si le nouvel axe des x passe par l'onde initiale, et si le point $(x, y. z)$ est assez éloigné de cette onde, de sorte que l'angle σ reste toujours très-petit, on aura

$$\cos p = a, \quad \sin p \sin q = a_1, \quad \sin p \cos q = a_2;$$

et la valeur de l'intégrale M sera

$$\frac{\sigma^2}{4n\sqrt{2\varkappa\pi}} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}} \right) \psi(x + a\rho, \quad y + a_1 \rho, \quad z + a_2 \rho).$$

La valeur de la fonction X est donc proportionnelle à σ^2, c'est-à-dire à la base du cône qui enveloppe l'onde initiale. Différentiant la fonction X deux fois de suite, nous aurons

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{M e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r_1^2}{2\varkappa t}}}{4\varkappa t^3 \sqrt{t}} \left[(r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t)^2 - 4\varkappa t (r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + 2\varkappa t^2 (\varkappa - 2n^2 t) \right],$$

$$- \frac{M e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r_2^2}{2\varkappa t}}}{4\varkappa t^3 \sqrt{t}} \left[(r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t)^2 - 4\varkappa t) r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + 2\varkappa t^2 (\varkappa - 2n^2 t) \right].$$

La condition pour le maximum et le minimum de X,

$$e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} (r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) = e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} (r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t),$$

étant combinée avec l'inégalité

$$e^{-r_1^2} > e^{-r_2},$$

donne

$$r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t < r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t,$$

13..

et, par suite,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} < 0;$$

d'où il résulte que la condition précédente se rapporte nécessairement au cas du *maximum*. Il nous resterait à trouver la condition du *maximum* de la fonction

$$\frac{dT}{dt} - 2\frac{d'T}{dt'},$$

en y conservant les termes proportionnels à ε et ε^2; mais cette discussion, il nous semble, serait trop longue pour avoir sa place ici.

§ III.

Réflexion du son sur le plan.

Lorsque l'atmosphère élastique est terminée d'un côté par un plan fixe, ce plan réfléchit l'onde sonore, de manière que la normale à la surface de l'onde, avant la réflexion, et la normale à la surface de cette onde, après la réflexion, font, avec le plan réfléchissant, deux angles égaux. Pour donner une démonstration générale de cette loi d'acoustique, prenons le plan réfléchissant pour le plan des coordonnées (xy); la condition que le mouvement normal à ce plan s'annule au contact avec lui sera

$$w = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dz} = 0, \quad \text{pour} \quad z = 0.$$

L'expression de s ne changera pas de forme, et l'on aura

$$s = \frac{dT}{dt} - 2\frac{d'T}{dt'} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz};$$

mais, pour que les fonctions T, T', X, Y, Z satisfassent aux équations

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = n^2\left(\frac{d^2 s}{dx^2} + \frac{d^2 s}{dy^2} + \frac{d^2 s}{dz^2}\right) + \varkappa\left(\frac{d.\frac{d^2 s}{dx^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2 s}{dy^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2 s}{dz^2}}{dt}\right),$$

$$\frac{ds}{dz} = 0, \quad \text{pour} \quad z = 0,$$

et se convertissent en fonctions arbitraires qui sont données pour toutes les valeurs des variables, comprises entre $x = -\infty$, $y = -\infty$ et $x = \infty$, $y = \infty$, et seulement entre $z = 0$ et $z = \infty$, par les équations

$$s_0 = F(x, y, z), \quad X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = 0,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_0 = \psi(x, y, z), \quad \left(\frac{dY}{dt}\right)_0 = \varphi(x, y, z), \quad \left(\frac{dZ}{dt}\right)_0 = \chi(x, y, z),$$

il faut supposer

$$T = \frac{2}{\pi^3}\int F(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma\; \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

$$T' = \frac{2}{\pi^3}\int F'(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma\; \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

$$X = \frac{2}{\pi^3}\int \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma\; \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

$$Y = \frac{2}{\pi^3}\int \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma\; \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

$$Z = \frac{2}{\pi^3}\int \chi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\sin cz\sin c\gamma\; \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

où l'on a désigné, pour abréger, les limites arbitraires des α, β, γ par les signes $-$ et $+$.

En observant que

$$\cos cz\cos c\gamma = \frac{1}{2}\cos c(z-\gamma) + \frac{1}{2}\cos c(z+\gamma),$$

$$\sin cz\sin c\gamma = \frac{1}{2}\cos c(z-\gamma) - \frac{1}{2}\cos c(z+\gamma),$$

et faisant usage de l'analyse des paragraphes précédents, on aura

$$T = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}}\iiint F(\alpha, \beta, \gamma)\left[e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(\frac{e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}}{\rho}\right) + e^{-\frac{\rho_1^2}{2\kappa t}}\left(\frac{e^{\frac{\rho_1 n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho_1 n}{\kappa}}}{\rho_1}\right)\right]\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

où

$$\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$
$$\rho_1^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Pour X et Y on obtient des expressions pareilles. On trouve de même

$$T = \frac{e^{-\frac{n^2 t^2}{2\varkappa t'}}}{4 n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t'}} \int\int\int F(\alpha, \beta, \gamma) \left[e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t'}} \left(\frac{e^{\frac{\rho n t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{\rho n t}{\varkappa t'}}}{\rho} \right) + e^{-\frac{\rho_1^2}{2\varkappa t'}} \left(\frac{e^{\frac{\rho_1 n t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{\rho_1 n t}{\varkappa t'}}}{\rho_1} \right) \right] \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},$$

si l'on écrit, pour abréger, l'expression de T sous la forme suivante :

$$T = \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{0}{d\gamma}} + \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K_1\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{0}{d\gamma}},$$

où K représente le terme qui contient ρ, et K_1 le terme qui contient ρ_1, et qu'on remplace dans ce dernier γ par $-\gamma$, on aura

$$T = \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{0}{d\gamma}} - \int F(\alpha, \beta, -\gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{0}{d\gamma}},$$

en observant que $K = K_1$ pour $\rho = \rho_1$.

Donc la fonction F contribue deux fois à l'ondulation dans le même point (x, y, z). La première ondulation se propage suivant les lois des ondes dans une atmosphère illimitée de tous côtés : c'est l'ondulation directe. La seconde ondulation, ou l'ondulation réfléchie, produit des ondes dont les formes et les lois de la propagation sont celles qui ont lieu pour des ondes provenant d'une onde initiale identique par la forme et les dimensions, avec l'onde initiale réelle, mais située de l'autre côté du plan réfléchissant et symétrique avec cette dernière.

Des conclusions pareilles se rapportent aux fonctions X, Y, Z.

THÉORÈME SUR L'ÉQUATION

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2);$$

PAR J. LIOUVILLE.

La transformation par rayons vecteurs réciproques, dont M. William Thomson s'est servi avec tant de succès dans ses Recherches de Physique mathématique, fournit, comme on sait, une solution de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2),$$

où λ, x, y, z sont fonctions des variables indépendantes α, β, γ, et de laquelle dépend la représentation *géographique* des corps dans l'espace, dont j'ai dit un mot à la page 220 du tome XIII de ce Journal. J'ajoute ici que l'équation citée *ne comporte aucune autre solution*, en comprenant, bien entendu, comme on le peut, dans la généralité des formules, les valeurs de x, y, z, linéaires en α, β, γ, qui s'offrent d'elles-mêmes lorsque λ est une constante; théorème important et qui remplit une lacune dans la science.

Le principe sur lequel je m'appuie pour établir ce théoreme (principe consistant en ce que l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2 + dw^2$ ne donne pour x, y, z que des valeurs linéaires en u, v, w) m'a aussi permis de simplifier, sans en changer en rien l'esprit, et pour ainsi dire en y supprimant seulement des détails superflus, la démonstration de M. Lamé pour les surfaces orthogonales isothermes (tome VIII, page 397) : cette démonstration pourra désormais être comparée sans désavantage à celle toute différente de M. Bonnet (tome XIV, page 401).

THÈSE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L'ABBÉ SOUFFLET.

§ Ier.

Aperçu historique. — Comparaison des méthodes.

Euler a le premier traité des surfaces du second ordre dans son célèbre ouvrage *Introd. in Analys. infin.* Il a fait voir que toutes les formes sous lesquelles s'offrent les surfaces représentées par l'équation du second degré pouvaient se réduire à cinq, qu'elles avaient un centre et trois axes principaux rectangulaires; il a indiqué le cas dans lequel le centre s'éloigne à l'infini.

Cinquante années s'écoulèrent sans que cette belle discussion reçût aucun développement nouveau. Enfin l'illustre Monge, que M. Hachette aidait dans ses travaux, reprit l'examen approfondi des surfaces du second ordre. Ces deux géomètres entrèrent plus complétement qu'Euler lui-même dans tout le détail de la classification de ces surfaces et de leurs propriétés fondamentales. Ils apprirent à trouver les sections rectilignes entrevues déjà par quelques géomètres, et les sections circulaires indiquées par d'Alembert, et ils démontrèrent que les surfaces du second degré pouvaient être engendrées, soit par le mouvement réglé d'un cercle variable de rayon, soit, pour quelques-unes d'entre elles, par le mouvement d'une ligne droite.

Plusieurs élèves de l'École Polytechnique, que Monge et Hachette avaient initiés à ces premières notions, marchèrent à leur tour dans cette voie nouvelle, et poussèrent très-loin la recherche des propriétés des surfaces du second ordre. Nous citerons en particulier MM. J. Binet, Petit, Livet.

Plus tard, M. Cauchy eut l'idée heureuse et féconde de couper la surface du second degré par des droites issues d'un même point, et de fonder ainsi toute la théorie sur l'équation très-simple

$$sr^2 + 2tr + u = k,$$

dans laquelle r est le rayon vecteur mené du point fixe à la surface, s, t, u des fonctions des cosinus des angles que fait le rayon vecteur avec les trois axes rectangulaires et des coordonnées du point fixe,

et k un coefficient constant. Ce mode de discussion simple, naturel et éminemment remarquable, ouvrait une ère nouvelle à l'étude des surfaces du second degré. On en déduit immédiatement l'équation des plans diamétraux, les équations du centre, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un plan diamétral soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales, l'équation du troisième degré qui donne les directions des axes et des plans diamétraux principaux et les longueurs des carrés des demi-axes principaux.

M. Cauchy démontra encore directement la réalité des racines de l'équation caractéristique des axes principaux, en faisant remarquer que son premier membre changeait trois fois de signe entre des limites connues; et montra, en même temps que M. l'abbé Moigno, que l'équation du plan tangent se déduisait immédiatement des deux équations

$$u = k, \quad t = 0.$$

Il est grandement à regretter que M. Cauchy, emporté par des recherches d'un plus haut intérêt, n'ait pas tiré de l'équation

$$sr^2 + 2tr + u = k$$

tout le parti possible; car cette équation, comme M. l'abbé Moigno l'a remarqué dans la préface à ses *Leçons de calcul différentiel*, contient la théorie complète des surfaces du second degré, et doit conduire, par la voie la plus large et la plus droite, à la connaissance de toutes leurs propriétés.

En 1836, M. Saint-Guilhem, ingénieur des Ponts et Chaussées, reprit, dans un Mémoire inséré au Journal de M. Liouville, la détermination des plans principaux des surfaces du second degré rapportées à trois axes quelconques; c'était une généralisation naturelle de la méthode de M. Cauchy, et un moyen d'établir, d'une manière plus courte et plus élémentaire, les théorèmes de M. Binet sur les relations qui lient les demi-axes principaux à trois demi-diamètres conjugués quelconques, théorèmes que M. Saint-Guilhem étendit, en les modifiant, au paraboloïde hyperbolique.

En rappelant le beau travail de Monge sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde, et la première étude des foyers faite par M. Chasles,

nous aurons tracé avec assez de détails l'histoire des travaux qui ont eu les surfaces du second degré pour objet, et que M. Leroy a développés dans son Traité de l'analyse appliquée à la géométrie.

Ce Traité éminemment classique ne laisse rien à désirer quant à l'énoncé des théorèmes et à la rigueur des démonstrations; mais il n'est personne qui, en le lisant et en étudiant consciencieusement les divers et nombreux Mémoires analysés dans cette Notice historique, n'ait vivement regretté de voir que l'on ne soit arrivé jusqu'ici à établir l'ensemble de toutes les propriétés des courbes et des surfaces du second degré qu'en recourant tour à tour à une multitude de restrictions, à des procédés indépendants les uns des autres, etc. On désirait depuis longtemps que, sans rien supposer sur la nature des axes au point de départ, que sans changement de coordonnées, etc., on pût arriver à mettre en évidence, par des considérations géométriques saillantes et des formules peu compliquées, la nature des surfaces du second degré, leur séparation immédiate, leur centre, leurs plans diamétraux, leurs axes, leurs plans tangents, les sections rectilignes et circulaires, les cônes et cylindres tangents et asymptotiques, les foyers, etc. Or tel est le but que nous avons voulu atteindre et que nous croyons avoir atteint en substituant à une analyse multiple une analyse uniforme qui puise dans sa généralité même un plus grand degré d'élégance et de clarté. Il n'est pas une des propriétés des surfaces du second degré qui ne se déduise par des raisonnements élémentaires de l'équation si simple

$$sr^2 + 2tr + u = 0,$$

sorte de lien universel, qui enchaîne tout, amène tout, rappelle tout, etc., etc. Dans l'ancienne méthode, ces diverses propriétés étaient comme étrangères l'une à l'autre; elles ne se supposaient pas mutuellement; il fallait tour à tour deviner, reconnaître et démontrer chacune d'entre elles par un tour de force particulier. Aujourd'hui, elles sont étroitement unies, elles se donnent la main, ou mieux, elles se montrent d'elles-mêmes, et on les retrouvera bon gré mal gré en égalant à zéro un ou plusieurs des coefficients s, t, u, et des fonctions de ces coefficients qui, séparés et réunis, ont des significations précises qu'il est impossible de méconnaître.

§ II.

Notions préliminaires. — Coordonnées. — Plan. — Valeurs limites.

1. Nous croyons utile d'établir d'abord quelques principes sur lesquels il faudra nous appuyer plus tard.

Concevons dans l'espace trois axes quelconques OX, OY, OZ et une droite indéfinie; prenons sur cette droite deux points (x_1, y_1, z_1), (x, y, z), et sur la distance ρ, qui les sépare, une longueur égale à l'unité. En désignant les projections de cette unité sur les axes par p, q, r, on aura cette suite de rapports égaux :

$$(1) \qquad \frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r} = \frac{\rho}{1},$$

ou bien les équations

$$x = x_1 + p\rho, \quad y = y_1 + q\rho, \quad z = z_1 + r\rho.$$

Il est essentiel d'observer :

1°. Que les quantités p, q, r sont liées entre elles par la relation

$$(2) \quad p^2 + q^2 + r^2 + 2qr\cos(q, r) + 2rp\cos(r, p) + 2pq\cos(p, q) = 1;$$

2°. Que la direction d'une ligne droite sera déterminée par les projections p, q, r de l'unité de longueur prise sur cette ligne, ou seulement par les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ de ces mêmes projections.

2. Supposons qu'on nous donne un plan; abaissons de l'origine sur ce plan une perpendiculaire qui fasse avec les axes des angles α, β, γ et rencontre le plan à une distance d: en projetant orthogonalement sur cette perpendiculaire les coordonnées x, y, z d'un point quelconque du plan donné, nous aurons l'équation

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = d,$$

dont tous les coefficients ont une signification géométrique, bien que les axes ne soient pas rectangulaires.

Les cosinus des angles α, β, γ, relatifs à la droite d, dépendent de p, q, r: en projetant, en effet, orthogonalement, sur chacun des

axes l'unité de longueur prise sur la droite d, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= p + q\cos(p, q) + r\cos(r, p),\\
\cos\beta &= q + r\cos(q, r) + p\cos(p, q),\\
\cos\gamma &= r + p\cos(r, p) + q\cos(q, r).
\end{aligned}$$

Recherchons maintenant les conditions de perpendicularité d'un plan quelconque

$$(2) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

sur une droite donnée p, q, r. Pour y parvenir, exprimons d'abord que le plan (2) est parallèle au plan (1) ou qu'il est perpendiculaire à la droite d, en posant

$$\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\cos\beta} = \frac{C}{\cos\gamma};$$

puis éliminons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ à l'aide des relations précédentes; nous trouverons ainsi les conditions demandées

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{A}{p + q\cos(p, q) + r\cos(r, p)}\\
&= \frac{B}{q + r\cos(q, r) + p\cos(p, q)}\\
&= \frac{C}{r + p\cos(r, p) + q\cos(q, r)}.
\end{aligned}\right.$$

En éliminant x, y, z de l'équation (2) au moyen de leurs valeurs en coordonnées polaires (1), n° **1**, on obtiendra

$$(Ap + Bq + Cr)\rho + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0:$$

or si l'on fait simultanément

$$(4) \qquad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad Ap + Bq + Cr = 0,$$

le rayon ρ devenu indéterminé se confondra tout entier avec la surface (2); ce qui montre à la fois que cette surface est réellement un plan, et que les équations (4) expriment la coïncidence de ce plan avec une droite p, q, r quelconque.

Quand on pose seulement

$$Ap + Bq + Cr = 0,$$

le rayon ρ devient infini, et, par conséquent, parallèle au plan (2); nous avons donc, dans cette dernière équation, la condition du parallélisme d'une droite et d'un plan.

Déterminons enfin le volume d'un parallélipipède en fonction de ses arêtes p, q, r; ce volume étant égal au produit de l'arête r par la *section droite* correspondante, on aura, en désignant par R le dièdre dont l'arête est r,

$$\text{vol}\,(p, q, r) = r \,.\, p \sin(p, r) \,.\, q \sin(q, r) \,.\, \sin R.$$

Mais, en vertu d'une formule connue de trigonométrie, on a

$$\sin(p, r) \,.\, \sin(q, r) \,.\, \sin R = \sqrt{1 - \cos^2(p, q) - \ldots},$$

donc

$$\text{vol}\,(p, q, r)$$
$$= p \,.\, q \,.\, r \sqrt{1 - \cos^2(p, q) - \cos^2(q, r) - \cos^2(r, p) + 2\cos(p, q)\cos(q, r)\cos(r, p)}.$$

3. Si une fonction $\varphi(v)$ entière et algébrique est assujettie à la condition $\varphi(v) =$ ou > 0, en sorte que l'on ait $\varphi(v) = u^2$, u étant réel; alors les racines réelles et inégales de l'équation $\varphi(v) = 0$, seront des valeurs maximum ou minimum de v, considéré comme fonction de u.

En effet, soient v' une de ces racines et h un accroissement infiniment petit, en posant $v = v' + h$, on trouvera

$$\varphi(v) = \varphi(v' + h) = \varphi(v') + h\varphi'(v') + \ldots.$$

Or, par hypothèse, on a $\varphi(v) > 0$, $\varphi(v') = 0$, et h est infiniment petit; donc, le terme $h \,.\, \varphi'(v')$ est essentiellement positif, et, par suite, h et $\varphi'(v')$ sont toujours de même signe; donc à partir de la valeur v', v ne peut que diminuer si $\varphi'(v')$ est < 0, et ne peut qu'augmenter si $\varphi'(v')$ est > 0; donc enfin la racine v' est une valeur maximum ou minimum de v, selon que $\varphi'(v')$ est négative ou positive.

On prouverait de la même manière que les racines égales, dont le nombre est impair, jouissent de la même propriété que la racine

simple v'. Avant de passer à l'analyse des surfaces du second ordre, qui font le principal objet de ce travail, nous ferons encore remarquer que nous comprenons les valeurs maximum et minimum sous la dénomination commune de *valeurs limites*.

§ III.

Transformation de l'équation du second degré à trois variables. — Plans diamétraux. — Classification. — Centre.

4. L'équation générale du second degré à trois variables, rapportée à des axes quelconques, peut se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy \\ \quad + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = u = 0. \end{array} \right.$$

En substituant aux coordonnées x, y, z, dans cette équation, leurs valeurs en coordonnées polaires

$$x = x_1 + p\rho,\quad y = y_1 + q\rho,\quad z = z_1 + r\rho,$$

on obtient

$$(2)\qquad s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$s = ap^2 + a'q^2 + a''r^2 + 2bqr + 2b'rp + 2b''pq,$$

$$\begin{array}{l} t = (ax_1 + b'z_1 + b''y_1 + c)\,p + (a'y_1 + bz_1 + b''x_1 + c')\,q \\ \quad + (a''z_1 + by_1 + b'x_1 + c'')\,r = X_1 p + Y_1 q + Z_1 r, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u_1 = ax_1^2 + a'y_1^2 + a''z_1^2 + 2by_1z_1 + 2b'z_1x_1 + 2b''x_1y_1 \\ \quad + 2cx_1 + 2c'y_1 + 2c''z_1 + d: \end{array}$$

L'équation (2) sera le point de départ de notre analyse des surfaces du second ordre.

5. Un plan diamétral étant celui qui divise en parties égales un système de cordes parallèles à une droite donnée p, q, r, pour déduire ce plan de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

il suffit de poser

$$t = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1)\left\{\begin{aligned}&(ap + b'r + b''q)x_1 + (a'q + br + b''p)y_1 + (a''r + bq + b'p)z_1\\ &\qquad + cp + c'q + c''r = 0.\end{aligned}\right.$$

En effet, si nous faisons glisser le pôle x_1, y_1, z_1 sur le plan (1) sans faire varier p, q, r, tous les rayons vecteurs ρ resteront parallèles entre eux, et leurs valeurs tirées de l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

seront deux à deux égales et de signe contraire; donc l'équation (1) représente un plan diamétral.

Si les coefficients de ce plan ou des quantités proportionnelles à ces coefficients étaient donnés à priori, on en déduirait sans peine la direction p, q, r des cordes conjuguées correspondantes.

Soient maintenant deux plans diamétraux

$$(ap + \ldots)x_1 + (a'q + \ldots)y_1 + (a''r + \ldots)z_1 + cp + c'q + c''r = 0,$$
$$(ap' + \ldots)x'_1 + (a'q' + \ldots)y'_1 + (a''r' + \ldots)z'_1 + cp' + c'q' + c''r' = 0;$$

chacun d'eux sera parallèle aux cordes conjuguées de l'autre, si les paramètres p, q, r et p', q', r' de ces cordes vérifient simultanément les deux conditions

$$(ap + \ldots)p' + (a'q + \ldots)q' + (a''r + \ldots)r' = 0,$$
$$(ap' + \ldots)p + (a'q' + \ldots)q + (a''r' + \ldots)r = 0;$$

or ces conditions de parallélisme peuvent être vérifiées d'une infinité de manières, puisqu'elles se ramènent à une seule; donc, à un même plan diamétral donné correspond une infinité de plans diamétraux conjugués.

Cela posé, concevons deux plans diamétraux réciproquement conjugués; prenons pour axe des z le diamètre déterminé par leur intersection; enfin supposons que le plan des xy soit parallèle à leurs cordes conjuguées: d'après cette disposition, les cordes conjuguées

aux plans zy et zx étant respectivement parallèles aux axes des x et des y, l'équation (1), n° 4, des surfaces du second ordre deviendra, sans rien perdre de sa généralité,

$$(2)\qquad \mathrm{P}x^2 + \mathrm{P}'y^2 + \mathrm{P}''z^2 + 2\mathrm{Q}z + \mathrm{H} = 0,$$

d'où l'on conclut que toutes les sections planes de ces surfaces seront des ellipses ou des hyperboles. Cependant si le diamètre formé par l'intersection de l'axe des z avec la surface est infini, le coefficient P'' s'évanouira, et alors les sections planes parallèles à ce diamètre seront des paraboles.

Ainsi donc, d'après la nature des sections déduites de l'équation (2), les surfaces du second ordre peuvent se diviser en cinq genres principaux : ellipsoïdes, hyperboloïdes à une et à deux nappes, paraboloïdes elliptiques et hyperboliques.

6. Pour reconnaître si ces différents genres de surfaces sont doués de centre, il faut essayer de réduire leur équation polaire à

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

en posant

$$t = \mathrm{X}_1 p + \mathrm{Y}_1 q + \mathrm{Z}_1 r = 0,$$

afin que, comme l'exige la nature du centre, les rayons diamétralement opposés soient égaux entre eux ; mais pour que cela ait lieu dans toutes les directions possibles, il faut évidemment que la condition

$$t = 0,$$

à laquelle est assujettie la direction de ρ, soit identique ; nous aurons donc pour les équations du centre,

$$\mathrm{X}_1 = 0,\quad \mathrm{Y}_1 = 0,\quad \mathrm{Z}_1 = 0.$$

Le dénominateur commun D des expressions des coordonnées du centre x_1, y_1, z_1 se présente sous la forme

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' :$$

s'il n'est pas nul, les valeurs des coordonnées étant alors finies et déterminées, il y aura un centre unique ; mais, dans le cas contraire,

le centre sera impossible ou deviendra indéterminé; il y aura, dans ce dernier cas, une infinité de centres situés sur une même droite ou un même plan.

En prenant le centre pour origine des coordonnées, l'équation (2), n° 5, se ramène aux suivantes :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A'^2} + \frac{z^2}{A''^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A'^2} - \frac{z^2}{A''^2} \pm 1 = 0,$$

desquelles on conclut que les ellipsoïdes et les hyperboloïdes sont seuls doués de centre.

Les genres les plus remarquables des surfaces dénuées de centre, ou dont les diamètres sont infinis, sont renfermés dans l'équation

$$\frac{x^2}{P^2} \pm \frac{y^2}{Q^2} - z = 0;$$

nous ne dirons rien pour le moment des autres cas.

§ IV.

Plans principaux. — Équation du troisième degré.

7. Voyons s'il n'existe pas de plans diamétraux perpendiculaires à leurs cordes conjuguées. D'après les conditions (3), n° **2**, pour rendre les cordes p, q, r perpendiculaires à leur plan diamétral (1), n° **5**, il suffit de poser les relations

$$\frac{ap + b''q + b'r}{p + q\cos pq + r\cos rp} = \frac{a'q + br + b''p}{q + r\cos qr + p\cos pq} = \frac{a''r + bq + b'p}{r + p\cos rp + q\cos rq} = \frac{s}{1};$$

le dernier membre $\frac{s}{1}$ se forme en multipliant respectivement par p, q, r les deux termes de chacun des rapports précédents, et en divisant la somme des antécédents par celle des conséquents.

Maintenant faisons, pour abréger,

$$a - s = A, \ldots, \quad b - s\cos(q, r) = B, \ldots,$$

nous obtiendrons ainsi les équations

$$Ap + B''q + B'r = 0, \quad B''p + A'q + Br = 0, \quad B'p + Bq + A''r = 0.$$

Des deux premières nous tirerons, pour déterminer la direction des

cordes principales, les relations

(1) $$\frac{q}{r} = \frac{AB - B'B''}{B''^2 - AA'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{A'B' - BB''}{B''^2 - AA'};$$

et ces valeurs, substituées dans la troisième équation, donneront pour calculer s l'équation

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

qui peut être mise sous la forme

(2) $$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0.$$

8. Pour que la discussion de l'équation précédente ne dépende que de son dernier terme D, commençons par discuter la fonction

(1) $$s = ap^2 + a'q^2 + a''r^2 + 2bqr + 2b'rp + 2b''pq,$$

après l'avoir divisée préalablement par $p^2 + q^2 \ldots = 1$. Nous trouverons alors, en supposant $a > 0$, que s est positif, si l'on a, quels que soient q, r,

(2) $$(b''^2 - aa')q^2 + (b'^2 - aa'')r^2 + 2(b'b'' - ab)qr < 0;$$

or cette condition entraîne nécessairement les suivantes :

(3) $$b''^2 - aa' < 0 \quad \text{et} \quad (ab - b'b'')^2 - (b''^2 - aa')(b'^2 - aa'') < 0,$$

donc, à cause de

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = D,$$

on aura

$$s > 0,$$

si

$$a > 0, \quad b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0.$$

Dans le cas particulier où

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' < 0,$$

l'inégalité (2) subsiste encore; mais comme elle peut alors passer par zéro, il en résulte que, si

$$a > 0, \quad b''^2 - aa' < 0 \quad D = 0,$$

on aura

$$s = \text{ ou } > 0.$$

En supposant

$$b''^2 - aa' > 0 \quad \text{et} \quad D < 0,$$

ou bien seulement

$$D > 0,$$

nous conclurons de l'inégalité (2) que, dans ces deux cas, on a

$$s > \text{ ou } < 0.$$

Il en sera de même si

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' > 0.$$

A l'inspection du second polynôme (3), on voit que les binômes

(4) $$b''^2 - aa', \quad b'^2 - aa'', \quad b^2 - a'a'',$$

sont nécessairement de même signe dans les deux cas $D < 0$ et $D = 0$, à cette différence près que, dans le second cas, ils peuvent être nuls tous ou quelques-uns d'entre eux. Les signes des mêmes binômes restent quelconques lorsque $D > 0$.

Remarquons encore que les trois équations

$$D = 0, \quad b''^2 - aa' = 0, \quad b'^2 - aa'' = 0,$$

entraînent

$$ab - b'b'' = 0,$$

et, par suite,

$$b^2 - a'a'' = 0:$$

donc, quand les binômes (4) seront nuls, D sera lui-même nul, de sorte que l'on sera dispensé, dans certaines discussions numériques, de faire le calcul du polynôme D.

Les quantités p, q, r étant essentiellement finies, la fonction entière s qui en dépend le sera elle-même; donc elle aura au moins deux valeurs limites. Ces deux limites, que je désigne par s' et s'', seront de même signe si $s > 0$ quels que soient p, q, r, et de signes

15..

contraires si $s >$ ou < 0. Ainsi en résumant toute cette discussion de s, nous aurons, a étant supposé positif:

1°. $s > 0$ et deux limites s', s'' positives, si

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0;$$

2°. $s \geqq 0$ et deux limites s', s'' positives, mais dont l'une est nulle, si

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D = 0;$$

3°. $s \gtrless 0$ et deux limites s', s'' de signes contraires, si

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0,$$

ou

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D = 0, \quad \text{ou seulement} \quad D > 0.$$

Maintenant constatons que les valeurs limites de s sont déterminées par l'équation (2), n° **7**: pour y parvenir, multiplions par s la relation

$$p^2 + \ldots + 2qr\cos(q, r) + \ldots = 1,$$

retranchons le résultat de l'expression (1) de s, et posons

$$a - s = A, \ldots, \quad b - s\cos(q, r) = B, \ldots,$$

nous aurons ainsi l'équation

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bqr + 2B'pr + 2B''pq = 0,$$

qui, étant ordonnée par rapport à p, devient

$$Ap^2 + 2B_1 p + C = 0.$$

Or, pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que s satisfasse à la condition

$$B_1^2 - AC = \text{ou} > 0;$$

donc, d'après le principe n° **3**, les valeurs limites de s, devront vérifier l'équation $B_1^2 - AC = 0$, c'est-à-dire

$$(B''^2 - AA')q^2 + (B'^2 - AA'')r^2 + 2(B'B'' - AB)qr = 0.$$

Mais, pour que les valeurs de $\frac{q}{r}$, qui dépendent de cette équation, soient réelles, il faut aussi que s satisfasse à la condition

$$(B'B'' - AB)^2 - (B'^2 - AA')(B''^2 - AA') = \text{ou} > 0,$$

donc, d'après le principe invoqué plus haut, les valeurs limites de s seront enfin déterminées par l'équation

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0$$

ou bien

(5) $$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

ce qu'il s'agissait de prouver. Les coefficients L, M, N, D sont d'ailleurs donnés par les relations suivantes :

$$L = 1 - \cos^2(p, q) - \cos^2(q, r) - \cos^2(r, p) + 2\cos(p, q)\cos(q, r)\cos(r, p),$$

$$M = -a\sin^2(q, r) - a'\sin^2(r, p) - a''\sin^2(p, q) + 2b\sin(r, p)\sin(p, q)\cos OX + 2b'\sin(p, q)\sin(q, r)\cos OY + 2b''\sin(q, r)\sin(r, p)\cos OZ,$$

$$N = aa' - b''^2 + a'a'' - b^2 + aa'' - b'^2 - 2(ab - b'b'')\cos(q, r) - 2(a'b' - bb'')\cos(r, p) - 2(a''b'' - bb')\cos(p, q),$$

$$D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''.$$

Nous avons désigné par OX, OY, OZ les angles dièdres des plans coordonnés.

9. Les trois racines de l'équation (5) sont réelles, puisque nous avons reconnu à priori la réalité de deux d'entre elles : en les désignant donc par s', s'', s''', il viendra

$$s'.s''.s''' = -D;$$

et, par conséquent :

Si $D < 0$ et $s' > 0$, $s'' > 0$, on aura $s''' > 0$;

Si $D < 0$ et $s' > 0$, $s'' < 0$, on aura $s''' < 0$;

Si $D > 0$ et $s' > 0$, $s'' < 0$, on aura $s''' > 0$.

En comparant ce tableau avec celui du n° **8**, on met en évidence les signes des racines de l'équation (5); elle a en effet :

1°. Trois racines positives, lorsque

$$b''^2 - aa' < 0 \quad \text{et} \quad D < 0;$$

2°. Une racine positive et deux négatives, quand

$$b''^2 - aa' > 0 \quad \text{et} \quad D < 0;$$

3°. Deux racines positives et une négative, quand seulement

$$D > 0.$$

Dans le premier cas, l'une des racines positives est nulle, quand

$$D = 0;$$

dans le second cas, l'une est nulle et les deux autres sont de signes contraires, lorsque

$$D = 0.$$

Ainsi par la seule inspection de l'équation donnée

$$u = 0,$$

il est possible de connaître directement les signes des racines de l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

de laquelle dépendent les plans principaux et la nature de la surface.

Depuis M. Petit, les auteurs se servaient de la règle de Descartes, qui a l'inconvénient d'entraîner dans des calculs impraticables lorsque l'équation

$$u = 0$$

est rapportée à des axes quelconques.

La fonction s a une signification géométrique qu'il convient de remarquer. En désignant par ρ et ρ' les racines de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\rho . \rho' = \frac{u_1}{s};$$

mais nous venons de voir que s a trois valeurs limites réelles, et, de plus, que les rayons vecteurs corespondants à ces trois valeurs sont perpendiculaires entre eux; donc par un pôle quelconque x_1, y_1, z_1 on peut mener trois sécantes perpendiculaires entre elles, telles que les rectangles $\rho_1\rho'_1$,... de leurs segments soient des maxima ou des minima. Déjà ce théorème avait été énoncé et démontré par M. Chasles pour les surfaces douées de centre.

§ V.

Caractères analytiques des surfaces du second ordre. — Paramètres relatifs aux plans diamétraux conjugués.

10. Soit, comme nous l'avons déjà vu,

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

l'équation des surfaces douées de centre, en y substituant les valeurs de s tirées de l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

on connaîtra les demi-axes de ces surfaces et, par suite, leur nature.

1er *Cas.* Lorsque les limites de s seront positives, les trois demi-axes seront réels pourvu que u_1 soit négatif; la surface est l'ellipsoïde réel qui a pour caractères analytiques

$$b''^2 - aa' < 0, \quad D < 0, \quad u_1 < 0.$$

2^{me} *Cas.* Deux des limites de s étant positives et l'autre négative, nous avons deux hypothèses à faire:

1°. Si u_1 est négatif, deux des demi-axes seront réels et le troisième imaginaire: la surface est l'hyperboloïde à une nappe qui a pour caractères

$$D > 0, \quad u_1 < 0;$$

2°. Si u_1 est positif, nous trouverons deux demi-axes imaginaires et un seul réel; la surface est l'hyperboloïde à deux nappes correspondant aux caractères suivants

$$D > 0, \quad u_1 > 0.$$

Les deux hyperboloïdes se reconnaissent encore à d'autres signes analytiques.

En effet, nous avons vu que des trois limites de s, l'une était positive et les deux autres négatives, lorsque l'on avait

$$D < 0, \quad b''^2 - aa' > 0;$$

donc, en raisonnant comme dans le cas précédent, on trouvera

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0, \quad u_1 < 0$$

pour caractères de l'hyperboloïde à deux nappes; et

$$b''^2 - aa' > 0, \quad D < 0, \quad u_1 > 0$$

pour ceux de l'autre hyperboloïde.

Comme le polynôme u_1 entre dans les caractères analytiques de toutes les surfaces douées de centre, nous devons faire observer que les équations du centre permettent de le réduire à la forme

$$u_1 = cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d.$$

Remarquons encore que, dans le cas particulier où l'on a

$$u_1 = 0,$$

l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

devient simplement

$$s = 0;$$

et si de cette dernière équation on élimine p, q, r à l'aide des équations du rayon ρ,

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r},$$

on obtiendra pour l'équation de la surface celle du cône

$$a(x - x_1)^2 + \ldots + 2b(y - y_1)(z - z_1) + \ldots = 0:$$

nous verrons plus loin que ce cône est asymptote de l'hyperboloïde correspondant.

11. Désignons par R un demi-axe principal d'une surface douée

de centre, et de l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

tirons

$$\lim s = -\frac{u_1}{R^2};$$

alors l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

devenant

$$R^6 - \frac{Nu_1}{D}R^4 + \frac{Mu_1^2}{D}R^2 - \frac{Lu_1^3}{D} = 0,$$

nous aurons entre ses racines R, R', R'' les trois relations

$$R^2 + R'^2 + R''^2 = \frac{Nu_1}{D}, \quad R^2.R'^2.R''^2 = \frac{Lu_1^3}{D}, \quad R^2R'^2 + R'^2R''^2 + R^2R''^2 = \frac{Mu_1^2}{D};$$

enfin, si des équations relatives aux diamètres conjugués nous tirons les valeurs de u_1, M, N, D, nous arriverons aux trois théorèmes de M. J. Binet, qui lient entre eux les axes et les diamètres conjugués. En faisant le calcul pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A'^2} + \frac{z^2}{A''^2} - 1 = u = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned}
&R^2 + R'^2 + R''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2,\\
&R^2R'^2 + R'^2R''^2 + R^2R''^2 = A^2A'^2\sin^2(A, A')\\
&\qquad + A'^2A''^2\sin^2(A', A'') + A''^2A^2\sin^2(A'', A),\\
&R^2.R'^2.R''^2 = A^2.A'^2.A''^2.L.
\end{aligned}$$

Les deux hyperboloïdes donnent, aux signes près, les mêmes résultats.

12. Occupons-nous à présent de déterminer les caractères analytiques des surfaces dépourvues de centre. Comme les deux paraboloïdes admettent, l'un des sections elliptiques, et l'autre des sections hyperboliques, l'équation polaire de l'une quelconque de ces sections rapportée à son centre sera

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

or cette équation représentera une ellipse ou une hyperbole, selon que les valeurs limites de s seront de mêmes signes ou de signes contraires;

donc, d'après ce que nous avons dit en discutant l'équation

$$Ls^3 + Ms^2 + Ns + D = 0,$$

les caractères du paraboloïde elliptique seront

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' < 0;$$

et ceux du paraboloïde hyperbolique,

$$D = 0 \quad \text{et} \quad b''^2 - aa' > 0:$$

cependant s'il arrivait que le binôme

$$b''^2 - aa'$$

fût nul, il faudrait recourir aux autres binômes

$$b^2 - a'a'', \quad b'^2 - aa''.$$

Lorsque les équations du centre

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$$

seront incompatibles, comme il arrive dans les deux cas précédents, et que les trois binômes seront nuls à la fois, la surface sera un cylindre parabolique.

Si les équations du centre se réduisent à deux, et qu'au moins l'un des binômes $b''^2 - aa', \ldots$ diffère de zéro, la surface sera un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Enfin, si les équations du centre se réduisent à une seule et que les trois binômes soient nuls, l'équation

$$u = 0$$

représentera deux plans parallèles. Il nous suffit de rappeler ces faits sans qu'il soit nécessaire de les démontrer.

13. La direction de l'axe principal d'un paraboloïde se déduit des équations (2), n° **7**, en faisant $s' = 0$; on trouve ainsi

$$(1) \qquad \frac{q}{r} = \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'}.$$

Mais il importe de plus de connaître le point où cet axe perce le pa-

raboloïde afin de déterminer sa position absolue : or, l'équation d'une section principale rapportée à son centre étant

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

il en résulte que la direction du rayon vecteur dont les équations sont

$$(2) \qquad \frac{x - x_1}{p'} = \frac{y - y_1}{q'} = \frac{z - z_1}{r'},$$

est assujettie, en outre, à la condition

$$t = X_1 p' + Y_1 q' + Z_1 r' = 0,$$

et que, par suite, le plan de la section principale a pour équation

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0.$$

Maintenant, si nous exprimons que ce plan est perpendiculaire à l'axe principal p, q, r en posant

$$\frac{X_1}{p + q\cos pq + r\cos rp} = \frac{Y_1}{q + r\cos qr + p\cos pq} = \frac{Z_1}{r + p\cos rp + q\cos qr},$$

et si nous concevons ensuite qu'il soit transporté parallèlement à lui-même jusqu'au sommet principal ; alors nous aurons, pour déterminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce sommet, les deux équations précédentes avec $u_1 = 0$. Enfin, des équations (1) et (2), nous tirerons l'équation de l'axe

$$\frac{x - x_0}{a'b' - bb''} = \frac{y - y_0}{ab - b'b''} = \frac{z - z_0}{b''^2 - aa'}.$$

14. On peut déduire de l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

la distance ρ_1 d'un point x_1, y_1, z_1 de l'axe au sommet principal d'un paraboloïde : prenons, en effet, ce point pour pôle et faisons $s = 0$, nous obtiendrons ainsi

$$\rho_1 = -\frac{u_1}{2t};$$

mais il faut observer que les paramètres p, q, r qui entrent dans t

doivent convenir à la direction directe ou inverse de l'axe principal suivant le signe de u_1.

En supposant que le paraboloïde est rapporté à deux plans diamétraux conjugués et à un plan tangent, son équation sera

$$(1)\qquad u = \frac{x^2}{P^2} \pm \frac{y^2}{Q^2} - z = 0;$$

et alors les relations (1), n° **13**, devenant

$$\frac{q}{r} = 0, \quad \frac{p}{r} = 0,$$

il en résultera

$$p = 0, \quad q = 0,$$

et, par suite,

$$r = \pm 1:$$

ainsi donc nous aurons, dans le cas de l'équation (1),

$$2t = \mp 1 \quad \text{et} \quad u_1 = \pm \rho_1,$$

ou bien

$$u_1 = \pm 1,$$

en supposant

$$\rho_1 = 1.$$

Cette hypothèse est remarquable, car si dans l'équation (1) on pose $z = 1$, on reconnaît que les paramètres P, Q sont les demi-diamètres conjugués d'une section parallèle au plan xy et faite à la distance 1 de l'origine.

15. L'équation (5), n° **8**, devient

$$(1)\qquad Ls^2 + Ms + N = 0,$$

dans le cas des paraboloïdes. Pour déduire de cette équation les paramètres principaux de ces surfaces, désignons par R un demi-axe quelconque de la section principale faite à la distance 1 du sommet; ensuite de l'équation de cette section

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

tirons

$$\lim s = -\frac{u_1}{R^2},$$

et substituons cette valeur dans l'équation (1), nous aurons ainsi la relation

$$(2) \qquad NR^4 - MR^2 u_1 + Lu_1^2 = 0,$$

pour calculer les demi-axes R, R' de la section définie ci-dessus.

Pour déterminer les paramètres P, Q relatifs à des plans diamétraux quelconques, tirons de l'équation (1), n° **14**, les valeurs de N, M, u_1, et substituons-les dans les deux équations

$$R^2 + R'^2 = \frac{Mu_1}{N}, \quad R^2R'^2 = \frac{Lu_1^2}{N},$$

nous aurons ainsi les deux relations suivantes :

$$R^2 + R'^2 = P^2 \sin^2 pr + Q^2 \sin^2 qr, \quad R^2R'^2 = P^2Q^2L,$$

qui renferment les théorèmes énoncés par M. Saint-Guilhem, en 1836, dans le Journal de M. J. Liouville, comme on le voit en remarquant que les côtés des parallélogrammes et des parallélipipèdes dont les carrés forment les équations précédentes, sont

$$(P, 1), \quad (Q, 1), \quad (P, Q, 1), \quad (R, 1), \quad (R', 1), \quad (R, R', 1).$$

Ce que nous venons de dire du paraboloïde elliptique s'applique, à un signe près, à l'autre paraboloïde.

§ VI.

Contact des surfaces du second ordre avec un plan, un cylindre,... — Cône et plans asymptotes. — Sections rectilignes. — Plan polaire.

16. Les conditions de contact d'une surface du second ordre avec un plan, un cylindre, un cône, etc., ressortent facilement de l'équation

$$(1) \qquad s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0;$$

en effet, le plan, le cylindre,... ont une ligne droite pour génératrice, et, pour exprimer qu'une droite issue d'un pôle quelconque x_1, y_1, z_1 est tangente à une surface du second ordre, il suffit de rendre égales les

racines de l'équation (1) en faisant

$$t^2 - su_1 = 0; \tag{2}$$

or cette relation très-simple conduit directement aux équations d'un plan, d'un cylindre, etc., tangents à une surface du second ordre.

17. En plaçant d'abord le pôle $x_1 y_1 z_1$ sur la surface du second ordre, on a

$$u_1 = 0;$$

l'équation (2) se réduit à celle-ci,

$$t = X_1 p + Y_1 q + Z_1 r = 0;$$

et si l'on élimine p, q, r à l'aide des relations

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r},$$

on trouvera

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0.$$

Cette équation représente un plan tangent; et, à cause de $u_1 = 0$, elle devient

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0.$$

18. Lorsqu'en supposant p, q, r constants, on considère x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes; alors l'équation

$$t^2 - su_1 = 0$$

représente un cylindre circonscrit : en effet, lorsque p, q, r sont invariables, il est évident que les coordonnées x_1, y_1, z_1 qui vérifient la condition de contact $t^2 - su_1 = 0$, conviennent à un point quelconque d'un ensemble de droites parallèles entre elles et tangentes à la surface $u = 0$; elles sont donc les coordonnées d'un cylindre circonscrit.

En désignant par x', y', z' les coordonnées courantes des points communs au cylindre et à la surface u, on aura d'abord

$$u' = 0,$$

et, par suite,

$$t' = 0,$$

ce sont les deux équations de la courbe de contact située à la fois sur la surface $u = 0$ et sur le cylindre $t^2 - su_1 = 0$; et l'équation $t' = 0$ montre, en outre, que cette courbe de contact est située dans le plan diamétral conjugué aux cordes p, q, r parallèles aux génératrices.

En supprimant les accents des coordonnées courantes et en remplaçant u et t par leurs valeurs, on ramène l'équation

$$t^2 - su_1 = 0$$

à la forme

$$(1)\quad \begin{cases} [(ap + \ldots)x + (a'q + \ldots)y + (a''r + \ldots)z + cp + \ldots]^2 \\ = s(ax^2 + \ldots + 2byz + \ldots + d). \end{cases}$$

Lorsque l'on prend le centre $x_1\, y_1\, z_1$ de la surface u pour pôle et qu'on désigne par R le rayon parallèle aux génératrices, on peut, à l'aide de la relation

$$s\mathrm{R}^2 + u_1 = 0,$$

éliminer s de l'équation (1) du cylindre. Si la surface était dénuée de centre, on parviendrait encore à éliminer s; car, en plaçant le pôle au centre d'une section quelconque parallèle aux génératrices du cylindre, on aurait

$$s\mathrm{R}^2 + u_1 = 0.$$

19. Supposons maintenant que le pôle $x_1\, y_1\, z_1$ est fixe, et que le rayon vecteur passant toujours par ce point, reste tangent à la surface $u = 0$; alors, en éliminant p, q, r de $t^2 - su_1 = 0$, à l'aide des équations d'un rayon quelconque, nous trouverons

$$\begin{aligned}&[\mathrm{X}_1(x' - x_1) + \mathrm{Y}_1(y' - y_1) + \mathrm{Z}_1(z' - z_1)]^2 \\ &= u_1[a(x' - x_1)^2 + \ldots + 2b(y' - y_1)(z' - z_1) + \ldots],\end{aligned}$$

et cette équation sera nécessairement celle du cône circonscrit.

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe de contact devant vérifier l'équation

$$u = 0$$

de la surface donnée et celle de l'un quelconque des plans tangents

qui passent par le sommet du cône, cette courbe sera nécessairement représentée par les deux relations

$$ax^2 + \ldots + 2byz + \ldots + d = 0,$$

$$X(x_1 - x) + Y(y_1 - y) + Z(z_1 - z) = 0;$$

or en les ajoutant et en ordonnant leur somme par rapport à x, y, z, on a

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0;$$

ce qui prouve que la courbe de contact est plane. Nous verrons plus loin que son plan divise harmoniquement tous les rayons vecteurs compris dans l'intérieur du cône et issus de son sommet.

20. Lorsque dans l'équation polaire

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

on fait simultanément $s = 0$ et $t = 0$, le rayon ρ devient infini et la condition de contact

$$t^2 - su_1 = 0$$

se trouve en même temps vérifiée; donc alors les rayons vecteurs sont des asymptotes dont les directions seront données par les deux équations

$$s = 0, \quad t = 0:$$

et maintenant si de ces équations on élimine les directions variables p, q, r, on trouvera les équations

(1) $$a(x - x_1)^2 + \ldots + 2b(y - y_1)(z - z_1) + \ldots = 0,$$

(2) $$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0,$$

qui représentent, l'une un cône, l'autre un plan. Ces deux équations, combinées avec $u = 0$, déterminent une courbe du second ordre avec ses asymptotes, pourvu toutefois que le pôle $x_1 y_1 z_1$ ne coïncide pas avec le centre, car si le pôle coïncidait avec le centre même de la surface u, on aurait

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0;$$

et alors, l'équation du plan (2) devenant identique, le cône (1) deviendrait un cône asymptotique.

Cette théorie des asymptotes ne s'applique tout entière qu'aux deux hyperboloïdes : en effet, l'ellipsoïde n'admettant pas l'hypothèse $s = 0$, il s'ensuit qu'il n'a jamais d'asymptotes. Le paraboloïde elliptique admet bien l'équation

$$s = 0;$$

mais, comme cette équation se ramène à la forme

$$ap + b''q + b'r = 0,$$

elle ne conduirait qu'à un plan diamétral parallèle à l'axe principal.

Lorsque le paraboloïde est hyperbolique, le cône (1) se transforme en deux plans asymptotes qui se coupent suivant un diamètre : en effet, les caractères analytiques de ce paraboloïde permettent de décomposer la fonction $s = 0$ en deux autres,

$$(3)\qquad \begin{cases} ap + \left(b'' + \sqrt{b''^2 - aa'}\right) q + \left(b' + \sqrt{b'^2 - aa''}\right) r = 0, \\ ap + \left(b'' - \sqrt{b''^2 - aa'}\right) q + \left(b' - \sqrt{b'^2 - aa''}\right) r = 0; \end{cases}$$

de sorte qu'en éliminant les variables p, q, r, on obtient les équations des deux plans suivants :

$$(4)\qquad \begin{cases} \quad a(x - x_1) + \left(b'' + \sqrt{b''^2 - aa'}\right)(y - y_1) \\ + \left(b' + \sqrt{b'^2 + aa''}\right)(z - z_1) = 0, \\ \quad a(x - x_1) + \left(b'' - \sqrt{b''^2 - aa'}\right)(y - y_1) \\ + \left(b' - \sqrt{b'^2 - aa''}\right)(z - z_1) = 0. \end{cases}$$

Ces plans se coupent suivant un diamètre, ou suivant une ligne parallèle à l'axe principal : en effet, retranchons l'une de l'autre les équations (3), en tenant compte de la condition

$$D = (b''^2 - aa')(b'^2 - aa'') - 2(b'b'' - ab)^2 = 0$$

relative au paraboloïde, nous retrouverons ainsi un des coefficients angulaires de l'axe

$$\frac{q}{r} = \frac{ab - b'b''}{b''^2 - aa'}.$$

Si nous ajoutons ensuite les mêmes équations (3), nous aurons

$$ap + b''q + b'r = 0,$$

et en substituant dans ce résultat la valeur de $\frac{q}{r}$, nous retomberons sur le second coefficient angulaire de l'axe

$$\frac{p}{r} = \frac{a'b' - bb''}{b''^2 - aa'};$$

donc les plans (4) se coupent réellement suivant un diamètre.

Si le pôle $x_1 y_1 z_1$ est placé en un point quelconque de ce diamètre, le plan (2) coupera le paraboloïde suivant une hyperbole qui aura son centre en ce point; et il coupera en même temps les deux plans (4) suivant les asymptotes de cette courbe. Il suit de là que les plans (4) sont le lieu géométrique des asymptotes de toutes les sections conjuguées au diamètre qui résulte de leur intersection.

21. Si l'on vérifie la condition de contact

$$t^2 - su_1 = 0,$$

en posant

$$s = 0, \quad t = 0, \quad u_1 = 0,$$

on rendra identique l'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0;$$

et dans ce cas le rayon ρ devenant indéterminé se confondra tout entier avec la surface $u = 0$: donc les surfaces pour lesquelles les équations

$$s = 0, \quad t = 0$$

seront compatibles, admettront en chaque point des sections rectilignes. Les directions p, q, r de ces sections rectilignes seront données par les équations précédentes, et comme l'une d'elles est du second degré, il s'ensuit que par chaque pôle pris sur la surface $u_1 = 0$, on pourra tracer deux droites indéfinies qui coïncideront avec elle.

En éliminant p, q, r de $t = 0$, à l'aide des équations connues du rayon vecteur ρ, on reconnaît que ces deux droites sont situées dans le plan tangent au point $(x_1 y_1 z_1)$, et, par suite, que ce plan coupe la surface suivant des sections rectilignes.

En faisant la même élimination pour $s = 0$, on obtient une surface parallèle au cône ou aux plans asymptotes dont nous avons parlé;

ce qui démontre que les sections rectilignes faites sur la surface $u = 0$ par le plan tangent, sont parallèles à deux génératrices du cône ou des plans asymptotes.

Pour reconnaître d'une manière générale dans quel cas les équations

$$s = 0, \quad t = 0$$

sont compatibles, il faudra éliminer $\frac{q}{r}$ de l'une d'elles, et dans le résultat poser les conditions propres à rendre réelles les valeurs de $\frac{p}{r}$; par ce moyen, on reconnaitra que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique admettent seuls des sections rectilignes réelles : mais il conviendra d'employer dans le calcul les équations simplifiées des surfaces du second ordre.

22. L'équation

$$s\rho^2 + 2t\rho + u_1 = 0$$

conduit immédiatement au théorème du plan polaire. En effet, soient ρ et ρ' les deux racines de cette équation; leur produit sera égal à $\frac{u_1}{s}$, leur somme à $\frac{-2t}{s}$, et le rapport du produit à la somme sera enfin

$$(1) \qquad \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'} = -\frac{u_1}{2t}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2\rho\rho'}{\rho + \rho'} = -\frac{u_1}{t}.$$

Maintenant sur la sécante indéfinie issue du pôle P, qui nous donne ρ' et ρ'' par ses rencontres en M et N avec la surface $u = 0$, prenons une longueur $PK = \rho_0$ telle, que nous ayons la relation

$$\rho_0 = \frac{2\rho\rho'}{\rho + \rho'} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\rho_0} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

ou enfin la proportion harmonique

$$MP : MK :: NP : NK;$$

substituons ensuite ρ_0 dans la seconde équation (1) au lieu de son

expression; nous aurons ainsi

$$\rho_0 = -\frac{u_1}{t}.$$

Cette équation représente un plan lieu géométrique des points K qui divisent harmoniquement toutes les sécantes issues du même pôle P. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\rho_0 t + u_1 = 0;$$

laquelle, à cause de $x - x_1 = p\rho, \ldots$, devient

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) + u_1 = 0,$$

ou, enfin,

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées courantes et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle. Si ce pôle est convenablement placé pour mener des tangentes, il sera possible de former un cône circonscrit à la surface u; et alors le plan polaire

$$X_1 x + Y_1 y + Y_1 z + cx_1 + c'y_1 + c''z_1 + d = 0,$$

sera le plan de la courbe de contact.

§ VII.

Sections circulaires. — Surfaces de révolution.

23. Recherchons s'il est possible qu'un plan coupe les surfaces du second ordre suivant un cercle. Désignons par $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées du centre de la section, et prenons ce point pour pôle, alors la section devra avoir pour équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0,$$

et son plan sera représenté par la relation

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + Z_1(z - z_1) = 0$$

qu'on obtient en éliminant de $t = 0$ les variables p, q, r, relatives à la direction d'un rayon ρ quelconque. Maintenant il reste à déter-

miner la position de ce plan de manière que s soit constant, afin que l'équation

$$s\rho^2 + u_1 = 0$$

représente un cercle.

Pour parvenir à ce but, multiplions par s la relation (2), n° 1, et retranchons le résultat de l'expression de s; en posant ensuite

$$a - s = \mathrm{A},\ldots, \quad b - s\cos(q, r) = \mathrm{B},\ldots,$$

comme nous l'avons fait ailleurs, nous aurons

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{A}'q^2 + \mathrm{A}''r^2 + 2\,\mathrm{B}qr + 2\,\mathrm{B}'rp + 2\,\mathrm{B}''pq = 0;$$

et cette équation devra exister en même temps que la suivante

$$t = \mathrm{X}_1 p + \mathrm{Y}_1 q + \mathrm{Z}_1 r = 0.$$

En éliminant le rapport $\frac{p}{r}$, nous aurons un résultat de la forme

$$\mathrm{M}q^2 + 2\,\mathrm{N}qr + \mathrm{L}r^2 = 0,$$

et afin que le rayon ρ puisse tourner en tous sens dans le plan de la section, nous poserons

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{L} = 0.$$

Ces conditions, qui vont nous servir à déterminer s, $\frac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{X}_1}$, $\frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{X}_1}$, deviennent, lorsqu'elles sont développées,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \mathrm{A}\mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{A}'\mathrm{X}_1^2 - 2\,\mathrm{B}''\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 = 0,\\
\mathrm{L} &= \mathrm{A}\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{A}''\mathrm{X}_1^2 - 2\,\mathrm{B}'\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1 = 0,\\
\mathrm{N} &= \mathrm{A}\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_1 - \mathrm{B}'\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1 - \mathrm{B}''\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1 + \mathrm{B}\mathrm{X}_1^2 = 0;
\end{aligned}$$

et puisque l'on peut les vérifier en posant

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Z}_1 = 0,$$

il s'ensuit évidemment que le lieu géométrique des centres des sections circulaires passe par le centre même de la surface $u = 0$.

Tirons de $M = 0$, $L = 0$ les valeurs des rapports $\frac{Y_1}{X_1}$, $\frac{Z_1}{X_1}$ et formons leur somme; de plus, tirons cette même somme de l'équation

$$M + L + 2N = 0$$

et comparons les deux résultats : nous retrouverons ainsi la fonction de s relative aux axes principaux sous la forme connue

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0.$$

Cette équation, combinée avec $M = 0$, $L = 0$, donne la solution du problème des sections circulaires. On en déduit trois valeurs de s, à chacune desquelles répondent deux valeurs de $\frac{Y_1}{X_1}$, $\frac{Z_1}{X_1}$, tirées de $M = 0$, $L = 0$; mais comme il faut, pour que ces racines soient réelles, vérifier les deux conditions

$$B'^2 - AA' > 0, \quad B''^2 - AA'' > 0,$$

le nombre des solutions réelles sera ainsi réduit à deux. Pour rendre la discussion plus facile, rapportons la surface $u = 0$ à deux plans diamétraux principaux et à un troisième parallèle à leurs cordes conjuguées; nous aurons alors à opérer sur l'équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2cz + d = u = 0.$$

En substituant pour A, A',... leurs valeurs dans les équations précédentes, nous les réduirons à

$$(1) \qquad (a - s)(a' - s)(a'' - s) = 0,$$

$$(2) \qquad (a - s)Y_1^2 + (a' - s)X_1^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (a - s)Z_1^2 + (a'' - s)X_1^2 = 0,$$

et nous aurons enfin

$$X_1 = ax_1, \quad Y_1 = a'y_1, \quad Z_1 = a''z_1 + c.$$

D'après l'équation (1), il faut que s soit égal à l'une des quantités a, a', a''; et, d'après les équations (2) et (3), il doit être compris entre a et a' ou a''; donc, en supposant $a > a' > a''$, nous aurons $s = a'$, et, par suite, en consultant l'équation (2), nous trouverons Y_1, et, par

suite, $y_1 = 0$. Ce résultat nous apprend que le lieu des centres $x_1\, y_1\, z_1$ des sections circulaires est situé sur le plan coordonné zx.

Il nous reste à tenir compte de l'équation (3): or, en y substituant pour X_1, Z_1 et s leurs valeurs, nous en tirons

$$\frac{a'' z_1 + c}{a x_1} = \pm \sqrt{\frac{a' - a''}{a - a'}},$$

et combinant ensuite cette double équation avec $y_1 = 0$, nous aurons, pour lieu des centres, deux droites situées sur le plan zx et passant, de plus, par le centre de la surface, comme nous l'avons déjà dit.

A cause de $Y_1 = 0$, l'équation générale du plan des sections circulaires se réduit à la suivante

$$X_1 (x - x_1) + Z_1 (z - z_1) = 0,$$

et, l'élimination de X_1, Z_1 étant faite, elle devient

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} = \pm \sqrt{\frac{a' - a''}{a - a'}}.$$

Les deux plans représentés par cette équation sont parallèles à l'axe oy et forment avec l'axe oz des angles supplémentaires, qui deviendront égaux, et, par suite, droits, lorsque les deux sections se réduiront à une seule. Dans le cas du paraboloïde hyperbolique, on a

$$a'' = 0, \quad a' < 0;$$

et le radical précédent devenant $\sqrt{\frac{-a'}{a + a'}}$, est alors imaginaire. Ce genre de surface du second ordre est le seul qui n'admette pas de sections circulaires.

24. La surface du second ordre sera de révolution, si les deux systèmes des sections circulaires se réduisent à un seul; cherchons donc, d'après cela, les caractères de ce genre de surface. Les équations

$$M = 0, \quad L = 0,$$

donnent, comme nous l'avons vu, les coefficients X_1, Y_1, Z_1 du plan d'une section circulaire quelconque; or il suffit que leurs racines

soient égales, pour qu'il n'y ait qu'une série de sections circulaires; donc les conditions des surfaces de révolution seront

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0.$$

Si nous tirons alors de $M = 0$, $L = 0$, les relations

$$(1) \qquad \frac{Y_1}{X_1} = \frac{B''}{A}, \quad \frac{Z_1}{X_1} = \frac{B'}{A},$$

nous aurons pour plan d'une section circulaire quelconque

$$A(x - x_1) + B''(y - y_1) + B'(z - z_1) = 0,$$

et le lieu des centres ou l'axe de révolution sera enfin donné par les deux équations (1).

25. Examinons maintenant ce que devient l'équation

$$AB^2 + \ldots = 0.$$

Si on la met sous la forme

$$(B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') - (B'B'' - AB)^2 = 0,$$

il est évident que les conditions

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0,$$

posées plus haut, la réduiront à

$$B'B'' - AB = 0,$$

d'où il résulte

$$B^2 - A'A'' = 0;$$

et puisque ces binômes ne sont que du second degré en s, il s'ensuit que les trois racines de l'équation primitive se réduisent à deux, et que la troisième est égale à l'une d'elles. Remarquons, de plus, que ces mêmes équations binômes rendent indéterminés les coefficients angulaires des cordes conjuguées (2), n° **7**.

Les valeurs de s, déduites de chacune des trois équations

$$B''^2 - AA' = 0, \quad B'^2 - AA'' = 0, \quad B^2 - A'A'' = 0,$$

doivent être égales entre elles. Pour déterminer les conditions de cette égalité, substituons à A, A', ... leurs valeurs $a - s$, etc., dans les

équations précédentes, nous aurons ainsi

$$(a-s)(a''-s)=[b'-s\cos(p,r)]^2,\ldots,$$

ou bien

$$s^2\sin^2(p,r)-[(a+a''-2b'\cos(p,r)]s+aa''-b'^2=0,\ldots,$$

et éliminant ensuite s^2 entre ces équations prises deux à deux, nous obtiendrons enfin les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
s &= \frac{(aa'-b''^2)\sin^2(q,r)-(a'a''-b^2)\sin^2(p,q)}{[a+a'-2b''\cos(p,q)]\sin^2(q,r)-[a'+a''-2b\cos(q,r)]\sin^2(p,q)},\\
&= \frac{(a'a''-b^2)\sin^2(p,r)-(aa''-b'^2)\sin^2(q,r)}{[a'+a''-2b\cos(q,r)]\sin^2(p,r)-[a+a''-2b'\cos(p,r)]\sin^2(q,r)},\\
&= \frac{(aa''-b'^2)\sin^2(p,q)-(aa'-b''^2)\sin^2(p,r)}{[a+a''-2b'\cos(p,r)]\sin^2(p,q)-[a+a'-2b''\cos(p,q)]\sin^2(p,r)},
\end{aligned}$$

que devront vérifier les surfaces de révolution.

Terminons l'article des sections circulaires, en faisant observer qu'il n'y a que les surfaces de révolution qui puissent être touchées suivant une courbe plane par une sphère.

§ VIII.

Foyers des surfaces du second ordre. — Sections rapportées a leurs foyers.

26. Adoptant la définition analytique ordinaire, supposons que tous les rayons ρ issus d'un foyer seront des fonctions rationnelles de p, q, r, et, en conséquence, proposons-nous de rendre rationnelle l'équation

$$\rho=\frac{u_1}{-t\mp\sqrt{t^2-su_1}}.$$

Il ne serait pas possible d'admettre que l'on ait

$$\sqrt{t^2-su_1}=lp+mq+nr,$$

car cette hypothèse réduirait la surface du second ordre à un plan; il nous reste donc à poser

$$t^2-su_1=k^2 \text{ constant},$$

ce qui donne

$$(X_1^2 - au_1)p^2 + (Y_1^2 - a'u_1)q^2 + \ldots + 2(Y_1Z_1 - bu_1)qr$$
$$+ 2(Z_1X_1 - b'u_1)rp + \ldots = k^2.$$

En multipliant l'équation de condition $p^2 + \ldots = 1$ par k^2, et identifiant le produit avec la relation précédente, afin que la direction de ρ reste arbitraire, nous aurons, en posant $k^2 = -\mu u_1$,

$$X_1^2 = u_1(a - \mu), \quad Y_1^2 = u_1(a' - \mu), \quad Z_1^2 = u_1(a'' - \mu),$$
$$X_1Y_1 = u_1[b'' - \mu\cos(p, q)], \quad Y_1Z_1 = u_1[b - \mu\cos(q, r)],$$
$$Z_1X_1 = u_1[b' - \mu\cos(r, p)].$$

Éliminant ensuite X_1, Y_1, Z_1, on déduit de ces équations

$$(1)\qquad \begin{cases} (a - \mu)(a' - \mu) = [b'' - \mu\cos(p, q)]^2, \\ (a' - \mu)(a'' - \mu) = [b - \mu\cos(q, r)]^2, \\ (a'' - \mu)(a - \mu) = [b' - \mu\cos(r, p)]^2. \end{cases}$$

D'autres combinaisons, faciles à apercevoir, conduisent encore aux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} Y_1[b' - \mu\cos(r, p)] = X_1[b - \mu\cos(q, r)], \\ Z_1[b'' - \mu\cos(p, q)] = X_1[b - \mu\cos(q, r)]; \end{cases}$$

$$(3)\qquad X_1^2 - au_1 = Y_1^2 - a'u_1.$$

Ces six nouvelles équations tenant lieu des premières dont elles ont été déduites, c'est elles qu'il convient d'interpréter. Or on reconnaît dans le système (1), en remplaçant μ par s, les conditions des surfaces de révolution que nous avons étudiées : de plus, les deux valeurs de μ ou de s, tirées de l'une de ces équations, devant vérifier les deux autres, vérifieront aussi, comme nous l'avons déjà vu, l'équation

$$Ls^3 + \ldots + D = 0$$

relative aux plans principaux.

Le système des équations (2) représentera l'axe de révolution ou une droite quelconque perpendiculaire à cet axe, selon la valeur de μ que l'on aura substituée dans (2). Enfin, les intersections de l'axe avec la

surface du second ordre (3) achèveront de déterminer les foyers. S'il arrivait que ces foyers vinssent à coïncider avec le centre de la surface, il en résulterait

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0,$$

et, par suite, nous aurions

$$\rho = \frac{u_1}{-k},$$

c'est-à-dire, l'équation de la sphère; les caractères de cette surface, déduits des équations (1) et (2), seront donc

$$a = a' = a'', \quad b = a\cos(q, r), \quad b' = a\cos(r, p), \quad b'' = a\cos(p, q).$$

27. Dans le cas des courbes du second ordre, représentées par

$$ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cx + 2c'y + d = u = 0,$$

les conditions relatives aux foyers se réduisent à

$$X_1^2 = u_1(a-\mu), \quad Y_1^2 = u_1(a'-\mu), \quad X_1Y_1 = u_1[b - \mu\cos(p, q)];$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \begin{cases}(a-\mu)(a'-\mu) = [b - \mu\cos(p, q)]^2, \quad Y_1 = X_1\sqrt{\dfrac{a'-\mu}{a-\mu}}, \\ X_1^2 - au_1 = Y_1^2 - a'u_1.\end{cases}$$

La première de ces équations donne deux valeurs de μ; la deuxième, les deux axes correspondants; la troisième représente une hyperbole dont l'équation développée a la forme

$$(2) \quad \begin{cases}(b^2 - aa')(x_1^2 - y_1^2) + 2(bc' - ca')x_1 + 2(ac' - cb)y_1 \\ \quad + c'^2 - c^2 + ad - a'd = 0.\end{cases}$$

Si cette courbe pouvait couper les deux axes en quatre points, il y aurait autant de foyers; mais, à l'aide des équations aux axes, on démontre sans peine qu'il y a deux foyers au plus et un au moins.

L'équation (2) se réduit au premier degré dans le cas de $b^2 - aa' = 0$, c'est-à-dire quand la courbe est une parabole. On retrouve l'équation (2) en résolvant successivement $u = 0$ par rapport à x et à y, et en égalant entre eux les polynômes entiers qui se trouvent sous les radicaux.

L'équation focale

$$\rho = \frac{u_1}{k - t}$$

se ramène, quand on la développe, à la forme

$$k\rho = X_1 p\rho + Y_1 q\rho + u_1 = X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + u_1.$$

En plaçant l'origine des coordonnées au foyer, et en désignant par m, n, d les constantes X_1, etc., on trouve

$$\rho = mx + ny + d,$$

équation connue, qui sert de vérification à la première.

28. Par un point F, (x_1, y_1, z_1), mener un plan

(1) $$m(x - x_1) + n(y - y_1) + z - z_1 = 0,$$

qui coupe la surface $u = 0$, de manière que F soit le foyer de la section; et, réciproquement, chercher le foyer d'une section donnée.

Le pôle $x_1 y_1 z_1$ étant placé en F, il suffira de rendre $\sqrt{t^2 - su_1}$ constant, pour que ce pôle soit un foyer; posons donc

$$(X_1^2 - au_1)p^2 + \ldots + 2(Y_1 Z_1 - bu_1)qr + 2(X_1 Z_1 - b'u_1)pr + 2(X_1 Y_1 - b''u_1)pq = k^2 \text{ constant},$$

ou, pour abréger,

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2Bqr + 2B'pr + 2B''pq = k^2.$$

Maintenant, multiplions l'équation (2), n° **1**, par k^2, retranchons le résultat de l'équation précédente, et posons ensuite

$$A - k^2 = A_1, \ldots, \quad B - k\cos(q, r) = B_1, \ldots,$$

nous obtiendrons ainsi

(2) $$A_1 p^2 + A'_1 q^2 + A''_1 r^2 + 2B_1 qr + 2B'_1 pr + 2B''_1 pq = 0.$$

Or si on élimine p, q, r, cette équation représentera une surface conique dont le pôle F sera le sommet, qui coupera la surface $u = 0$ suivant les courbes cherchées, et qui prendra, du reste, autant de formes que k^2 aura de valeurs différentes.

Le rayon ne devant tourner sur son pôle que dans le plan (1), il faudra que la relation

$$mp + nq + r = 0,$$

qui exprime le parallélisme d'une droite avec ce plan, soit vérifiée en même temps que l'équation (2). Éliminons donc r entre ces deux équations, nous aurons alors un résultat de la forme

$$\mathrm{M}p^2 + \mathrm{N}q^2 + 2\mathrm{L}pq = 0;$$

cette équation devra être identique, afin que le rayon ρ tourne en tous sens dans le plan (1): nous aurons donc enfin, pour déterminer m, n et k, les équations

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{L} = 0,$$

ou bien

$$(3) \quad \mathrm{M} = \mathrm{A}''_1 m^2 - 2\mathrm{B}'_1 m + \mathrm{A}_1 = 0, \quad \mathrm{N} = \mathrm{A}''_1 n^2 - 2\mathrm{B}_1 n + \mathrm{A}'_1 = 0,$$
$$\mathrm{L} = \mathrm{A}''_1 mn - \mathrm{B}_1 m - \mathrm{B}'_1 n + \mathrm{B}''_1 = 0.$$

Des equations $\mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$, tirons les valeurs de m et de n, et faisons la somme $m + n$; formons de plus l'équation

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} + 2\mathrm{L} = 0,$$

pour en tirer aussi la valeur de $m + n$, et égalons ces deux expressions de la même somme: nous trouverons ainsi une fonction de k^2 du troisième degré semblable à la fonction de s, relative aux plans principaux, savoir :

$$(4) \qquad \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1^2 + \mathrm{A}'_1 \mathrm{B}'^2_1 + \mathrm{A}''_1 \mathrm{B}''^2_1 - \mathrm{A}_1 \mathrm{A}'_1 \mathrm{A}''_1 - 2\mathrm{B}_1 \mathrm{B}'_1 \mathrm{B}''_1 = 0.$$

Or nous avons vu, en recherchant les plans principaux, que les racines d'une équation de cette forme sont toujours réelles, et que l'une d'elles au moins est positive; il existe donc pour k^2 au moins une valeur convenable à laquelle correspondront deux systèmes de valeurs pour m et n. Ces valeurs de m et de n se déduiront des équations (3), mais elles ne seront réelles qu'aux conditions

$$(5) \qquad \mathrm{B}'^2_1 - \mathrm{A}_1 \mathrm{A}''_1 > 0, \quad \mathrm{B}_1^2 - \mathrm{A}'_1 \mathrm{A}''_1 > 0,$$

que k^2 devra remplir.

D'après les conditions (5) et (4), on peut décomposer l'équation (2) en facteurs, et la ramener ainsi au système des deux relations

$$A''_1 r + \left(B_1 + \sqrt{B_1^2 - A'_1 A''_1}\right) q + \left(B'_1 + \sqrt{B'^2_1 - A_1 A''_1}\right) p = 0,$$
$$A''_1 r + \left(B_1 - \sqrt{B_1^2 - A'_1 A''_1}\right) q + \left(B'_1 - \sqrt{B'^2_1 - A'' A}\right) r = 0;$$

d'où, en éliminant p, q, r, on tire les équations des plans des sections cherchées. Les équations (3) et (1) produiraient les mêmes résultats.

L'analogie de forme entre les équations (3), (4) et celles relatives aux sections circulaires, nous permet d'affirmer que par le foyer F on ne fera au plus que deux sections réelles ayant ce point pour foyer.

28. Les constantes k, m, n étant déterminées, comme nous venons de le voir, les équations d'une section ayant son foyer en F, seront

$$(1) \qquad \rho = \frac{u_1}{\mp k - t}, \quad mp + nq + r = 0.$$

Il nous reste à déterminer la grandeur et la position de l'axe focal; or nous y parviendrons en recherchant les valeurs limites du rayon ρ, ou, ce qui revient au même, celles de la fonction t. Élevons au carré l'expression de t et formons ainsi l'équation

$$X_1^2 p^2 + \ldots + 2 Y_1 Z_1 qr + \ldots = t^2;$$

multiplions la condition (2), n° 1, par t^2, pour la soustraire de l'équation précédente; et posons, pour abréger,

$$X_1^2 - t^2 = A, \ldots, \quad Y_1 Z_1 - t^2 \cos(q, r) = B, \ldots,$$

nous obtiendrons ainsi

$$(2) \qquad A p^2 + A' q^2 + A'' r^2 + 2 B qr + 2 B' rp + 2 B'' pq = 0.$$

En éliminant ensuite r de cette équation, à l'aide de

$$mp + nq + r = 0,$$

nous aurons un résultat de la forme

$$(3) \qquad M p^2 + N q^2 + 2 L pq = 0;$$

or, pour que les valeurs du rapport $\frac{p}{q}$ tirées de cette équation soient

réelles, il faut que k^2 satisfasse à la condition

$$L^2 - MN = \text{ou} > 0,$$

donc, d'après le principe n° 3, les limites de t^2 seront données par l'équation

$$(4) \qquad L^2 - MN = 0,$$

c'est-à-dire par

$$(A''mn - Bm - B'n + B'')^2 = (A''m^2 - 2B'm + A)(A''n^2 - 2Bn + A').$$

Enfin désignant par μ le maximum de t, et par φ l'angle que fait un rayon vecteur quelconque p, q, r avec l'axe focal, nous aurons

$$t = \mu \cos\varphi,$$

et, par suite, l'équation (1) deviendra

$$\rho = \frac{u_1}{\mp k - \mu\cos\varphi};$$

c'est l'équation d'une section rapportée à son foyer dans son plan. Cette section sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que l'on aura

$$\frac{\mu}{k} < 1, \quad \frac{\mu}{k} > 1, \quad \frac{\mu}{k} = 1.$$

La relation (3) et celle que l'on formerait par analogie en éliminant de l'équation (2) q au lieu de r, donnent les coefficients angulaires de l'axe focal sous la forme très-simple

$$\frac{q}{p} = -\frac{L}{N}, \quad \frac{r}{p} = -\frac{L'}{N'},$$

à cause de la condition (4) et de son homologue. Mais, au lieu de la relation

$$M'p^2 + N'r^2 + 2L'pr = 0,$$

analogue à l'équation (3), on peut encore se servir des équations

$$X_1 p + Y_1 q + Z_1 r = \mu \quad \text{et} \quad p^2 + \ldots + 2qr\cos(q, r) + \ldots = 1.$$

La question de trouver le foyer d'une section donnée peut se résoudre à l'aide des formules n° 28. En effet, si le plan (1) de la

section était connu d'avance, les trois équations (3) combinées avec celle de ce plan donneraient la constante k et les trois coordonnées x_1, y_1, z_1 du foyer de la section.

30 Appliquons maintenant le problème du n° **28** au cône elliptique : ce cône étant rapporté à des coordonnées rectangulaires, ayant leur origine O au sommet, aura pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0.$$

En supposant que l'axe Oz passe par le foyer F, les plans zx et zy couperont ce cône suivant deux droites, et il en résultera les conditions suivantes :

$$b^2 - a'a'' > 0 \quad \text{et} \quad b'^2 - aa'' > 0;$$

de plus, comme les sections parallèles au plan des xy seront alors des ellipses, nous aurons encore

$$b''^2 - aa' < 0.$$

Cela posé, les éléments du problème n° **28** seront pour le cas du cône, en désignant par δ la distance OF,

$$x_1 = 0,\quad y_1 = 0,\quad z_1 = \delta,\quad u_1 = a''\delta,\quad A = (b'^2 - aa'')\delta^2 > 0,$$
$$A' = (b^2 - a'a'')\delta^2 > 0,\qquad A'' = (a''^2 - a''^2)\delta^2 = 0,$$
$$B'' = (bb' - a''b'')\delta^2,\qquad B' = B = 0.$$

Or, d'après ces relations, l'équation (4), n° **28**, devient

$$(A - k^2)(A' - k^2) - B''^2 = 0,$$

et donne

$$2.k^2 = A + A' - \sqrt{(A + A')^2 + 4(B''^2 - AA')}.$$

Comme les équations (3), n° **28**, se réduisent dans les mêmes circonstances à

$$(1)\qquad m^2 = \frac{A - k^2}{k^2},\quad n^2 = \frac{A' - k^2}{k^2},\quad k^2 mn = B'';$$

il en résulte que k^2 est plus petit que A et A', et, par suite, plus petit que $\frac{A + A'}{2}$: c'est pour cela que nous avons omis le signe + devant le radical précédent.

Puisque les signes de m et n dépendent de celui de B″ dans la troisième équation (1), il n'y aura que deux solutions, et, d'après ce qui a été dit n° **29**, on pourra déterminer la grandeur de l'axe focal de chacune des sections, la direction de ce même axe, l'excentricité, et, par suite, la nature de la courbe.

§ IX.

Similitude des surfaces du second ordre.

31. Les conditions de similitude des surfaces se déduisent aisément des conditions de similitude des polyèdres. Soient donc deux surfaces du second ordre semblables et semblablement placées

$$ax^2 + \ldots + 2byz + cx + \ldots + d = u = 0,$$
$$Ax^2 + \ldots + 2Byz + Cx + \ldots + D = U = 0,$$

ou bien en coordonnées polaires

$$u_1 + 2t\rho + s\rho^2 = 0, \tag{1}$$
$$U_1 + 2T\rho' + S\rho'^2 = 0. \tag{2}$$

Si l'on admet que les deux pôles x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 sont des homologues pris dans l'espace ou sur les surfaces, deux rayons quelconques ρ et ρ', issus parallèlement de ces pôles, seront des lignes homologues ayant entre elles un rapport constant μ, indépendant de leur direction commune; posons donc

$$\rho = \mu\rho',$$

et, par suite, en éliminant ρ' de l'équation (2), nous aurons

$$U_1\mu^2 + 2T\mu\rho + S\rho^2 = 0. \tag{3}$$

Les valeurs de ρ, tirées des équations (3) et (1), devant être nécessairement égales, quelle que soit la grandeur du rayon, il faut que ces équations se réduisent à une seule. Multiplions donc la dernière par k et identifions le résultat avec (1), nous aurons ainsi

$$u_1 = \mu^2 k U_1, \quad s = Sk, \quad t = \mu k T.$$

Ces équations devront être vérifiées, quels que soient p, q, r, ou quelle que soit la direction commune des rayons ρ des deux surfaces semblables. Nous tirons de la seconde

$$s = \mathrm{S}k$$

les rapports égaux

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \frac{a'}{\mathrm{A'}} = \frac{a''}{\mathrm{A''}} = \frac{b}{\mathrm{B}} = \frac{b'}{\mathrm{B'}} = \frac{b''}{\mathrm{B''}} = k,$$

et de la troisième

$$t = \mu k \mathrm{T}$$

les trois relations

$$(4) \qquad \mathrm{X}_1 = \mu k \mathrm{X}'_1, \quad \mathrm{Y}_1 = \mu k \mathrm{Y}'_1, \quad \mathrm{Z}_1 = \mu k \mathrm{Z}'_1,$$

dans lesquelles $\mathrm{X}_1,\ldots$, $\mathrm{X}'_1,\ldots$, représentent les valeurs des dérivées de $u = 0$, $\mathrm{U} = 0$, pour x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 coordonnées de deux points homologues. A l'inspection des équations (4), on reconnaît que ces dérivées sont proportionnelles, et, par suite, que les plans tangents aux points homologues sont parallèles entre eux.

Si l'on donne d'avance le pôle x_1, y_1, z_1, les équations (4) feront connaître son homologue x'_1, y'_1, z'_1.

Les équations des centres des deux surfaces u, U, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Z}_1 = 0, \quad \mathrm{X}'_1 = \mathrm{Y}'_1 = \mathrm{Z}'_1 = 0,$$

vérifient les relations (4); les centres sont donc des points homologues.

Il est facile de déterminer un point homologue commun aux deux surfaces u, U; il suffit, pour cela, de faire dans les équations (4)

$$x_1 = x'_1, \quad y_1 = y'_1, \quad z_1 = z'_1,$$

et de les résoudre.

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre commun de similitude étant ainsi déterminées, la première équation

$$u_1 = \mu^2 k \mathrm{U}_1$$

fera enfin connaître le rapport de similitude μ.

Les surfaces semblables $u = 0$, $\mathrm{U} = 0$ seront concentriques, lorsque l'on aura

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \ldots = \frac{c}{\mathrm{C}} = \frac{c'}{\mathrm{C'}} = \frac{c''}{\mathrm{C''}} = k,$$

puisque, dans cette hypothèse, les deux systèmes d'équations (5), qui déterminent respectivement les centres des surfaces, deviennent identiques entre eux, quand on multiplie le second par k.

§ X.

Surfaces d'un degré quelconque. — Plan tangent. — Courbe indicatrice. Surface osculatrice. — Rayon et lignes de courbure.

32. Disons maintenant quelques mots des surfaces en général. En posant

$$x = x_1 + p\rho,\quad y = y_1 + q\rho,\quad z = z_1 + r\rho,$$

l'équation

$$f(x, y, z) = u = 0$$

d'une surface quelconque, prendra la forme polaire

$$\begin{aligned} u_1 &+ \left(\frac{du_1}{dx_1}p + \frac{du_1}{dy_1}q + \frac{du_1}{dz_1}r\right)\rho \\ &+ \left(\frac{d^2u_1}{dx_1^2}p^2 + \ldots + 2\frac{d^2u_1}{dx_1dy_1}pq + 2\frac{d^2u_1}{dy_1dz_1}qr + 2\frac{d^2u_1}{dz_1dx_1}pr\right)\frac{\rho^2}{1.2} \\ &+ \left(\frac{d^3u_1}{dx_1^3}p^3 + \frac{d^3u_1}{dy_1^3}q^3 + \ldots\right)\frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ou

$$(1)\qquad u_1 + t\rho + s\frac{\rho^2}{1.2} + v\frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots + N\rho^{m-1} + M\rho^m = 0.$$

Si l'on place le pôle sur la surface, on a

$$u_1 = 0,$$

et, par suite, l'équation (1) devient

$$(2)\qquad t + s\frac{\rho}{1.2} + v\frac{\rho^2}{1.2.3} + \ldots + N\rho^{m-2} + M\rho^{m-1} = 0:$$

or, lorsque l'on fait $\rho = 0$, la sécante indéfinie sur laquelle nous prenons ρ devient tangente, et la relation précédente se réduit à $t = 0$; donc, en éliminant p, q, r de $t = 0$, au moyen des équations

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

d'une tangente quelconque, on obtiendra l'équation

$$\frac{du_1}{dx_1}(x - x_1) + \frac{du_1}{dy_1}(y - y_1) + \frac{du_1}{dz_1}(z - z_1) = 0$$

du lieu géométrique de toutes les tangentes ou du plan tangent. Le plan tangent à $u = 0$ conduirait facilement à la tangente à une courbe considérée comme l'intersection de deux surfaces.

33. Pour étudier particulièrement un point $m(x, y, z)$ de la surface $u = 0$, plaçons le pôle x_1, y_1, z_1 très-près de ce point; nous pourrons, en conséquence, négliger les puissances de ρ supérieures à la seconde, et réduire ainsi l'équation (1), n° **32**, à celle-ci

$$(1) \qquad u_1 + t\rho + s\frac{\rho^2}{2} = 0,$$

qui ne représente plus qu'une surface de second ordre. On distinguera la nature de cette surface à l'aide des dérivées secondes de u qui entrent dans s; puisque ces dérivées remplacent ici les quantités a, a', a'', b, b', b'' qui nous ont conduit précédemment à la distinction des surfaces du second ordre.

L'équation (1) représentera une section parallèle au plan tangent en $m(x, y, z)$, ou la courbe indicatrice, si l'on assujettit ρ à demeurer parallèle à ce plan, en posant la condition

$$\frac{du}{dx}p + \frac{du}{dy}q + \frac{du}{dz}r = 0.$$

De cette même équation (1) on déduit facilement l'équation de la surface osculatrice au point m. En effet, le pôle étant placé en ce point sur la surface $u = 0$, l'équation (1) devient

$$2t\rho + s\rho^2 = 0,$$

ou bien

$$(2) \quad 2\left(\frac{du}{dx}p + \frac{du}{dy}q + \frac{du}{dz}r\right)\rho + \left(\frac{d^2u}{dx^2}p^2 + \ldots + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}qr + \ldots\right)\rho^2 = 0,$$

en remplaçant t et s par leurs valeurs.

Désignons maintenant par x, y, z les coordonnées du point m pris pour pôle, et par x', y', z' les coordonnées courantes de la surface (2); nous aurons alors

$$x' - x = p\rho, \quad y' - y = q\rho, \quad z' - z = r\rho,$$

et, par suite, en éliminant $p\rho,\ldots$, nous ramènerons l'équation (2) à la suivante

$$2\left[\frac{du}{dx}(x'-x)+\frac{du}{dy}(y'-y)+\frac{du}{dz}(z'-z)\right]$$
$$+\frac{d^2u}{dx^2}(x'-x)^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dy\,dz}(y'-y)(z'-z)+\ldots=0,$$

qui représentera la surface osculatrice dont il est question. Il est évident qu'autour et très-près du point m, le rayon vecteur ρ de la surface (2) ne differe de celui de la surface (2), n° **32**, que d'un infiniment petit du second ordre.

L'équation (1), n° **32**, servirait encore à prouver que les surfaces de degré impair sont toutes infinies.

34. Il existe un moyen très-élémentaire pour déterminer l'expression du rayon de courbure ρ relatif à une section plane quelconque d'une surface; nous croyons devoir le faire connaître.

Soient

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

les cosinus connus du rayon de courbure dont il s'agit; soient, en second lieu,

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \frac{1}{\sqrt{p^2-q^2+1}}$$

les cosinus relatifs à la normale menée au point de rencontre du rayon avec la courbe; et soit enfin θ l'angle que fait la normale avec ce rayon.

En multipliant les cosinus correspondants aux mêmes axes et en ajoutant les produits, nous aurons

$$\cos\theta=\frac{\rho}{ds^2\sqrt{p^2+q^2+1}}(d^2z-pd^2x-qd^2y);$$

mais l'équation de la surface $z=\varphi(x,y)$, étant différentiée deux fois, donne

$$d^2z=pd^2x+qd^2y+rdx^2+2s\,dx\,dy+tdy^2;$$

donc, en éliminant

$$d^2z-pd^2x-qd^2y,$$

et en posant

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos 6,$$

on trouvera enfin

$$(1) \qquad \rho = \frac{\cos\theta\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos 6 + t\cos^2 6},$$

formule importante qu'il s'agissait d'établir.

La normale à la surface et la tangente à la section au point que nous considérons sont perpendiculaires entre elles, donc on aura, entre leurs cosinus, la relation

$$-p\cos\alpha - q\cos 6 + \cos\gamma = 0,$$

ou bien, à cause de $\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma = 1$,

$$(2) \qquad (1+p^2)\cos^2\alpha + 2qp\cos\alpha\cos 6 + (1+q^2)\cos^2 6 = 1.$$

Sans nous arrêter à déduire de l'équation (1) les théorèmes de Meusnier et d'Euler, et les conditions des ombilics,..., cherchons le maximum R du rayon ρ en supposant $\cos\theta = 1$. Comme les valeurs limites de ρ ne dépendent que du dénominateur de son expression, égalons donc ce dénominateur à $\frac{1}{k}$, en posant

$$(3) \qquad r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos 6 + t\cos^2 6 = \frac{1}{k},$$

multiplions ensuite cette équation par k et retranchons le résultat de l'équation (2), en faisant

$$\frac{\cos 6}{\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = m.$$

nous aurons ainsi

$$(1+q^2-kt)m^2 + 2(pq-ks)m + 1 + p^2 - kr = 0;$$

d'où il résulte, n° **3**, que les valeurs limites de k seront données par la relation

$$(4) \quad (s^2-tr)k^2 - [2pqs - t(1+p^2) - r(1+q^2)]k - (p^2+q^2+1) = 0.$$

En éliminant k, à l'aide de $R = k\sqrt{p^2+q^2+1}$, on aura enfin, pour

déterminer les courbures maximum et minimum, l'équation connue de Monge

$$(s^2 - tr)\,R^2 - [2pqs - t(1+p^2) - r(1+q^2)]\sqrt{p^2+q^2+1}.R \\ -(p^2+q^2+1)^2 = 0.$$

Si l'on divise entre elles les équations (2) et (3) et qu'on remplace $\frac{\cos 6}{\cos \alpha}$ par m, on aura

$$k = \frac{(1+p^2) + 2pqm + (1+q^2)m^2}{r + 2sm + tm^2},$$

et, par suite, l'équation (4) deviendra

$$[s(1+p^2) - pqt]\,m^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]\,m \\ + pqr - s(1+p^2) = 0.$$

Cette équation fera connaître les directions des sections principales; elle sera de plus l'équation différentielle des lignes de courbure de Monge, si l'on remplace m par $\frac{dy}{dx}$.

DÉVELOPPEMENTS

SUR

UNE CLASSE D'ÉQUATIONS,

PAR M. J.-A. SERRET.

1. Dans un Mémoire, publié au tome IX de ce Journal, M. Lobatto a fait connaître la forme générale des équations du troisième degré *dépourvues du second terme* qui possèdent une propriété remarquable observée depuis longtemps [*]. Cette propriété des équations dont je parle consiste en ce que, si l'on développe leurs trois racines en fraction continue, d'après la méthode de Lagrange, les trois fractions continues que l'on obtient sont terminées par les mêmes quotients.

J'ai reproduit l'analyse de M. Lobatto dans mon *Cours d'Algèbre supérieure*, avec quelques modifications (pages 208 et suivantes), et j'ai indiqué aussi comment on pourrait former les équations complètes du troisième degré qui ont cette même propriété.

Je me propose, dans cet article, de résoudre le probleme plus général dont voici l'énoncé : —

Quelles sont les équations irréductibles jouissant de la propriété que, si l'on développe leurs racines réelles en fraction continue par la méthode de Lagrange, deux ou plusieurs de ces fractions continues soient terminées par les mêmes quotients?

On verra que les équations irréductibles dont il s'agit ont un degré de la forme $2n$ ou de la forme $3n$. On peut partager leurs racines

[*] M. Vincent, dans son remarquable Mémoire *Sur la résolution des équations numériques*, l'a observée sur l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$ (tome Ier de ce Journal), et il ajoute : « Cette propriete mériterait peut-être un examen spécial. »

en n groupes composés chacun de deux ou trois racines, suivant que le degré est $2n$ ou $3n$; si les racines d'un même groupe sont réelles, les fractions continues qui les représentent sont terminées par les mêmes quotients.

Je donnerai, en même temps, la forme générale des équations qui possèdent cette singulière propriété.

Condition pour que les fractions continues qui représentent deux irrationnelles soient terminées par les mêmes quotients.

2. Si deux irrationnelles x et x' sont telles, que les fractions continues dans lesquelles elles se développent aient un même quotient complet y, on aura, par les propriétés des fractions continues,

$$(1) \qquad x = \frac{qy+p}{q'y+p'}, \quad x' = \frac{sy+r}{s'y+r'},$$

p, q, p', etc., étant des entiers qui satisfont aux deux conditions

$$(2) \qquad qp' - pq' = \pm 1, \quad sr' - rs' = \pm 1;$$

en outre, on peut supposer p', q', r', s' positifs, q et p seront de même signe que x, r et s de même signe que x'. Des équations (1) on tire

$$x' = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

en posant

$$a = rq' - sp', \qquad b = sp - rq,$$
$$a' = r'q' - s'p', \quad b' = s'p - r'q,$$

équations dont on déduit

$$ab' - ba' = (qp' - pq')(sr' - rs') = \pm 1.$$

Donc, pour que deux irrationnelles positives ou négatives x et x' puissent se développer en des fractions continues terminées par les mêmes quotients, il faut qu'elles soient liées l'une à l'autre par une équation de la forme

$$(3) \qquad x' = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

où a, b, a', b' désignent des entiers positifs ou négatifs satisfaisant à la condition

$$ab' - ba' = \pm 1. \tag{4}$$

3. Je dis maintenant que cette condition est suffisante. Pour le démontrer, remarquons d'abord qu'on peut supposer x et x' positives, car si l'une d'elles ou toutes deux sont négatives, on peut les remplacer par leurs valeurs absolues en changeant les signes de quelques-uns des coefficients a, b, a', b', changement qui n'altérera pas la condition (4).

Cela étant, on peut évidemment supposer a positif, car on ramènerait le cas contraire à celui-là en changeant les signes des quatre coefficients a, b, a', b'; quant à b, il peut être positif ou négatif. Si b est positif, a' et b' sont de même signe à cause de l'équation (4), et ils sont tous deux positifs à cause de l'équation (3), parce qu'on suppose x et x' positives. Si b est négatif, a' et b' sont de signes contraires à cause de l'équation (4); d'où il suit qu'en mettant en évidence les signes des nombres a, b, a', b', l'équation (3) a l'une des trois formes suivantes :

$$x' = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

$$x' = \frac{ax-b}{-a'x+b'},$$

$$x' = \frac{ax-b}{a'x-b'},$$

et, dans tous les cas, on a

$$ab' - ba' = \pm 1.$$

Dans le premier cas, on démontre aisément que x et x' se développent en des fractions continues terminées par les mêmes quotients (*voyez* mon *Cours d'Algèbre supérieure*, page 212). Le second cas se ramène au premier, car, en exprimant x en fonction de x', on trouve

$$x = \frac{b'x'+b}{a'x'+a}.$$

Pour démontrer que la même chose a lieu dans le troisième cas,

réduisons x en fraction continue. Soient $\frac{g}{g'}$ et $\frac{h}{h'}$ deux réduites consécutives aussi éloignées qu'on voudra, et z le quotient complet qui correspond à la réduite $\frac{h}{h'}$, on aura

$$x = \frac{hz + g}{h'z + g'},$$

et, par conséquent,

$$x' = \frac{(ah - bh')z + (ag - bg')}{(a'h - b'h')z + (a'g - b'g')} = \frac{cz + d}{c'z + d'};$$

on a d'ailleurs

$$cd' - dc' = (ab' - ba')(gh' - hg') = \pm 1;$$

le troisième cas se trouve donc ramené au premier si les entiers c, d, c', d' sont positifs, ou du moins sont tous quatre de même signe. Or c et d sont de même signe; en effet, ils ont respectivement le même signe que les différences

$$\frac{h}{h'} - \frac{b}{a}, \quad \frac{g}{g'} - \frac{b}{a},$$

lesquelles différences sont de même signe, puisque les fractions $\frac{h}{h'}$ et $\frac{g}{g'}$ diffèrent l'une de l'autre d'aussi peu qu'on veut. Pour une raison semblable, c' et d' sont de même signe, et parce que x' et z sont positives, on voit que les nombres c, d, c', d' sont de même signe; donc x' et z, par suite x' et x se développeront en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

Sur les fonctions linéaires de la forme $\frac{ax + b}{a'x + b'}$.

4. Soit posé

$$(1) \qquad \theta x = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

a, b, a', b' étant des quantités quelconques données; posons aussi

$$\theta^2 x = \theta\theta x, \quad \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \ldots, \quad \theta^m x = \theta\theta^{m-1} x,$$

il est très-aisé d'avoir l'expression générale de $\theta^m x$. Posons, en effet,

$$(2)\qquad \theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m};$$

on pourra écrire, d'après la formation des fonctions $\theta^2 x$, $\theta^3 x$, etc.,

$$(3)\qquad \begin{cases} a_m = a\, a_{m-1} + b\, a'_{m-1}, \\ a'_m = a' a_{m-1} + b' a'_{m-1}, \\ b_m = a\, b_{m-1} + b\, b'_{m-1}, \\ b'_m = a' b_{m-1} + b' b'_{m-1}. \end{cases}$$

Pour tirer de ces équations les valeurs de a_m, a'_m, b_m, b'_m en fonction des quantités connues a, a', b, b', désignons par z une quantité telle, que l'on ait

$$(4)\qquad 1 : z :: a + a'z : b + b'z,$$

on déduira des équations (3),

$$a_m + a'_m z = (a + a'z)(a_{m-1} + a'_{m-1} z),$$
$$b_m + b'_m z = (a + a'z)(b_{m-1} + b'_{m-1} z);$$

d'où l'on tire aisément

$$(5)\qquad \begin{cases} a_m + a'_m z = (a + a'z)^m, \\ b_m + b'_m z = z(a + a'z)^m. \end{cases}$$

En outre, comme l'équation (4) est du second degré, en appelant z et z' ses deux racines, on aura encore

$$(6)\qquad \begin{cases} a_m + a'_m z' = (a + a'z')^m, \\ b_m + b'_m z' = z'(a + a'z')^m. \end{cases}$$

Des équations (5) et (6) on peut maintenant tirer les valeurs de a_m, a'_m, b_m, b'_m.

En faisant, pour abréger,

$$(7)\qquad t = \sqrt{(a + b')^2 - 4(ab' - ba')},$$

et

$$(8)\qquad \begin{cases} P_m = (a+b'+t)^m + (a+b'-t)^m, \\ Q_m = \dfrac{(a+b'+t)^m - (a+b'-t)^m}{t}, \end{cases}$$

on trouve aisément

$$(9)\qquad \begin{cases} a_m = \dfrac{P_m + (a-b')\,Q_m}{2^{m+1}}, \\ a'_m = a'\dfrac{Q_m}{2^m}, \\ b_m = b\,\dfrac{Q_m}{2^m}, \\ b'_m = \dfrac{P_m - (a-b')\,Q_m}{2^{m+1}}, \end{cases}$$

équations dont on déduit

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_m - b'_m}{a'_m} = \dfrac{a-b'}{a'}, \\ \dfrac{b_m}{a'_m} = \dfrac{b}{a'}, \\ a_m b'_m - b_m a'_m = (ab' - ba')^m; \end{cases}$$

en sorte que, si

$$ab' - ba' = \pm 1,$$

on aura aussi

$$a_m b'_m - b_m a'_m = \pm 1.$$

On connait donc les coefficients de la fonction $\theta^m x$ en fonction des quantités connues a, b, a', b'. A la vérité, notre analyse semble en défaut si t est nulle, car alors, z et z' étant égales, les équations (6) ne diffèrent pas des équations (9); mais, comme les équations (8) et (9) ont lieu quelque petite que soit t, elles seront vraies encore pour $t = 0$: on a, dans ce cas,

$$P_m = 2(a+b')^m,$$
$$Q_m = 2m(a+b')^{m-1},$$

et, par suite,

$$(11)\qquad \begin{cases} a_m = \dfrac{(a+b')^m + m(a-b')(a+b')^{m-1}}{2^m}, \\ a'_m = \dfrac{ma'(a+b')^{m-1}}{2^{m-1}}, \\ b_m = \dfrac{mb(a+b')^{m-1}}{2^{m-1}}, \\ b'_m = \dfrac{(a+b')^m - m(a-b')(a+b')^{m-1}}{2^m}. \end{cases}$$

Dans ce cas, les quantités a, b, a', b' doivent vérifier l'équation

$$(12)\qquad (a+b')^2 = 4(ab' - ba'),$$

et l'on peut écrire la valeur de $\theta^m x$ comme il suit :

$$\theta^m x = \frac{\left(a - b' + \dfrac{a+b'}{m}\right)x + 2b}{2a'x - \left(a - b' - \dfrac{a+b'}{m}\right)}.$$

On voit que, pour $m = \infty$, $\theta^m x$ converge vers la quantité

$$\frac{(a-b')x + 2b}{2a'x - (a-b')},$$

qui n'est autre chose que l'une des constantes $\frac{a-b'}{2a'}$, $\frac{-2b}{a-b'}$, lesquelles sont égales à cause de la relation (12).

5. Proposons-nous maintenant de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait identiquement

$$(13)\qquad \theta^\mu x = x,$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad a_\mu = b'_\mu, \quad a'_\mu = 0, \quad b_\mu = 0.$$

On voit tout de suite qu'on doit exclure le cas particulier où l'on aurait

$$(a+b')^2 = 4(ab' - ba'),$$

car les équations (11) indiquent que, pour satisfaire aux équations (14),

il faudrait que l'on eût

$$a + b' = 0,$$

par suite,

$$ab' - ba' = 0,$$

et alors la fonction θx ne dépendrait pas de x. Cela étant, les équations (9) montrent que, pour satisfaire aux équations (14), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$Q_\mu = 0,$$

ou

$$(a + b' + t)^\mu = (a + b' - t)^\mu.$$

On tire de là

$$a + b' + t = (a + b' - t)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{\mu}\right),$$

et

(15) $$t = (a + b')\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda\pi}{\mu}\sqrt{-1},$$

en désignant par λ un nombre entier qu'on doit supposer premier avec μ pour qu'il faille effectivement exécuter μ fois sur x l'opération désignée par θ avant de reproduire x.

En comparant cette valeur de t avec celle qu'on tire de l'équation (7), on a

(16) $$(a + b')^2 - 4(ab' - ba')\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu} = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait identiquement

$$\theta^\mu x = x.$$

Si l'on suppose que a, b, a', b' soient réelles, l'équation (16) montre que la quantité $ab' - ba'$ est positive. Et comme on peut, sans changer la fonction θx, multiplier les constantes a, b, a', b' par un facteur quelconque, on voit que, sans faire aucune particularisation, on peut supposer

(17) $$ab' - ba' = 1,$$

et alors l'équation (16) donne

$$(18)\qquad a + b' = 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

Nous ne mettons pas le signe $\pm$ devant le second membre, parce qu'on peut, si on le juge à propos, changer les signes des quatre quantités a, b, a', b'. Des équations (17) et (18) on tire

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} b' &= -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right),\\ b &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}; \end{aligned}\right.$$

la fonction θx a pour valeur

$$(20)\qquad \theta x = \frac{ax - \dfrac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}}{a'x - \left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right)};$$

les quantités a et a' demeurent indéterminées; quant à λ, c'est un nombre entier quelconque premier avec μ. Si l'on continue de poser

$$\theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m},$$

on trouvera aisément

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} a_m &= \frac{a\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu} - \sin\frac{(m-1)\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}},\\ a'_m &= a'\,\frac{\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}},\\ b_m &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}\,\frac{\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}},\\ b'_m &= \frac{\sin\frac{(m+1)\lambda\pi}{\mu} - a\sin\frac{m\lambda\pi}{\mu}}{\sin\frac{\lambda\pi}{\mu}}. \end{aligned}\right.$$

6. Des équations (19) et (21), on déduit

$$
(22)\qquad \left\{
\begin{aligned}
b'_m &= -\left(a_m - 2\cos\frac{m\lambda\pi}{\mu}\right),\\
b_m &= -\frac{a_m^2 - 2a_m\cos\dfrac{m\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'_m},
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
(23)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a &= \frac{a_m\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu} + \sin\dfrac{(m-1)\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}},\\
a' &= a'_m\,\frac{\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}},\\
b &= -\frac{a_m^2 - 2a_m\cos\dfrac{m\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'_m}\;\frac{\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}},\\
b' &= \frac{\sin\dfrac{(m+1)\lambda\pi}{\mu} - a_m\sin\dfrac{\lambda\pi}{\mu}}{\sin\dfrac{m\lambda\pi}{\mu}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules permettent de résoudre la question suivante :

Étant donnée une fonction linéaire $\dfrac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m}$, *trouver une fonction linéaire* $\theta x = \dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ *telle, que l'on ait identiquement*

$$\theta^m x = \frac{a_m x + b_m}{a'_m x + b'_m} \quad \text{et} \quad \theta^\mu x = x.$$

On voit que le problème n'est possible que si les quantités données a_m, b_m, a'_m, b'_m satisfont aux équations (22).

Des équations irréductibles dont deux racines x et x' sont liées par la relation linéaire $x' = \frac{ax+b}{a'x+b'}$, où a, b, a', b' sont des constantes données.

7. Soit

$$\chi(x) = 0 \tag{1}$$

une équation irréductible, et supposons qu'entre deux racines x et x' on ait la relation

$$x' = \frac{ax+b}{a'x+b'} = \theta x, \tag{2}$$

où a, b, a', b' sont des constantes données. On sait que toutes les quantités comprises dans la série indéfinie

$$x,\quad \theta x,\quad \theta^2 x,\quad \theta^3 x, \ldots,$$

doivent être racines de l'équation (1), ce qui exige que l'une des fonctions θx, $\theta^2 x$, etc., soit égale à x. Supposons

$$\theta^\mu x = x. \tag{3}$$

Cette équation aura lieu identiquement, si l'on suppose que a, b, a', b' soient commensurables, ou, du moins, que ce soient des fonctions rationnelles des quantités que l'on considère comme connues et dont dépendent rationnellement les coefficients de l'équation proposée. Par conséquent, d'après ce qu'on a vu précédemment, on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} b' &= -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right), \\ b &= -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

en désignant toujours par λ un nombre entier premier avec μ.

Cela posé, on sait que le degré de l'équation (1) doit être un multiple $n\mu$ de μ, et que ses $n\mu$ racines peuvent être représentées comme

il suit [*] :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{llll} x, & \theta x, & \theta^2 x,\ldots, & \theta^{\mu-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1,\ldots, & \theta^{\mu-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2,\ldots, & \theta^{\mu-1} x_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1}, & \theta x_{n-1}, & \theta^2 x_{n-1},\ldots, & \theta^{\mu-1} x_{n-1}. \end{array}\right.$$

Soit

$$(6)\qquad x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x = y,$$

y dépendra d'une équation

$$(7)\qquad F(y) = 0,$$

de degré n et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités connues de l'équation (1) et de la fonction θ. L'équation (7) peut n'être pas résoluble algébriquement, mais les quantités

$$x,\quad \theta x,\quad \theta^2 x,\ldots,\quad \theta^{\mu-1} x$$

dépendent d'une équation de degré μ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y, et qui est, comme on sait, toujours résoluble algébriquement. Dans le cas qui nous occupe, et où la fonction θ est linéaire, cette dernière équation n'est autre que l'équation (6), et l'on voit, en résumé, que l'équation proposée (1) doit résulter de l'élimination de y entre les deux équations (6) et (7), dont la seconde peut être considérée comme ayant pour premier membre un polynôme irréductible quelconque de degré n.

En d'autres termes, les équations que nous étudions peuvent être considérées comme obtenues en multipliant un certain nombre n

[*] *Voir* le Mémoire d'Abel *Sur une classe d'équations résolubles algébriquement*, ou mon *Cours d'Algèbre supérieure*, vingt-sixième Leçon.

d'équations de la forme

$$x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y = 0,$$
$$x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_1 = 0,$$
$$x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x - y_{n-1} = 0,$$

où $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ désignent les n racines d'une équation irréductible dont les coefficients sont des quantités absolument arbitraires.

Des équations irréductibles à coefficients numériques et dont deux ou plusieurs racines se développent en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

8. Cherchons maintenant dans quel cas les fractions continues, dans lesquelles se développent deux racines réelles x' et x d'une équation irréductible, sont terminées par les mêmes quotients.

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi (n° **2**), que l'on ait

$$x' = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \theta x,$$

a, b, a', b' étant des entiers positifs ou négatifs liés par la relation

$$ab' - ba' = \pm 1;$$

en outre, pour que x et θx puissent représenter deux racines d'une équation irréductible, il faut qu'on puisse assigner un nombre entier μ, tel qu'on ait identiquement

$$\theta^\mu x = x,$$

ce qui exige, comme nous l'avons vu, qu'on ait

$$b' = -\left(a - 2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}\right),$$

$$b = -\frac{a^2 - 2a\cos\frac{\lambda\pi}{\mu} + 1}{a'}.$$

λ étant un nombre entier premier avec μ. Or puisque a, b, a', b' sont des nombres entiers, on voit que $2\cos\frac{\lambda\pi}{\mu}$ doit être un nombre entier, ce qui ne peut arriver que si μ est égal à 2 ou à 3. On voit par là que la propriété que nous étudions ne peut se rencontrer que chez les équations irréductibles dont le degré a la forme $2n$ ou la forme $3n$. Nous examinerons successivement ces deux classes d'équations.

9. Si l'on suppose $\mu = 2$ et $\lambda = 1$ (λ doit être premier avec μ), on a

$$\theta x = \frac{ax - \frac{a^2+1}{a'}}{a'x - a},$$

et

$$\theta^2 x = x;$$

a désigne un nombre entier quelconque, et a' un diviseur de a^2+1. Si l'on prend pour $F(y)$ un polynôme irréductible quelconque de degré n, et qu'on élimine y entre les deux équations

$$x + \theta x = y, \quad F(y) = 0,$$

ou

$$x^2 - yx + \left(\frac{ay}{a'} - \frac{a^2+1}{a'^2}\right) = 0, \quad F(y) = 0,$$

on aura la forme générale des équations de degré $2n$ jouissant de cette propriété que les $2n$ racines se partageront en n groupes tels que dans chaque groupe de deux racines réelles les fractions continues qui représentent ces racines seront terminées par les mêmes quotients.

Ce résultat peut être énoncé différemment :

Soit a un nombre entier quelconque, a' un diviseur quelconque de a^2+1, y une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, les deux racines de l'équation

$$x^2 - yx + \left(\frac{ay}{a'} - \frac{a^2+1}{a'^2}\right) = 0,$$

si elles sont réelles, se développeront en des fractions continues terminées par les mêmes quotients.

On déduit de là une conséquence assez remarquable, lorsque y est commensurable. Dans ce cas, on sait, en effet, que les deux racines de l'équation précédente se développent en des fractions continues périodiques, et que les périodes de ces deux fractions continues sont formées des mêmes termes écrits en ordre inverse. D'où il suit que si la période de la fraction continue qui représente l'une des racines est, par exemple,

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\ldots,\quad \omega,$$

on pourra, si l'on veut, prendre pour période la suite inverse

$$\omega,\ldots,\quad \gamma,\quad \beta,\quad \alpha.$$

10. Supposons $\mu = 3$, on aura, en faisant $\lambda = 2$ (le cas de $\lambda = 1$ est identique à celui de $\lambda = 2$, on passe de l'un à l'autre en changeant les signes de a et a'),

$$\vartheta x = \frac{ax - \dfrac{a^2+a+1}{a'}}{a'x - (a+1)},$$

$$\vartheta^2 x = \frac{(a+1)x - \dfrac{a^2+a+1}{a'}}{a'x - a},$$

$$\vartheta^3 x = x,$$

a est un nombre entier quelconque et a' un diviseur de $a^2 + a + 1$. Quelle que soit l'irrationnelle x, les fractions continues dans lesquelles se développent

$$x,\quad \vartheta x,\quad \vartheta^2 x,$$

se termineront par les mêmes quotients. Si donc $F(y)$ désigne un polynôme irréductible quelconque de degré n, et qu'on élimine y entre les équations

$$x + \vartheta x + \vartheta^2 x = y,\quad F(y) = 0,$$

ou

$$x^3 - yx^2 + \left[\frac{(2a+1)y}{a'} - \frac{3(a^2+a+1)}{a'^2}\right]x - \left[\frac{a(a+1)y}{a'^2} - \frac{(2a+1)(a^2+a+1)}{a'^3}\right] = 0,$$

$$F(y) = 0.$$

on obtiendra la forme générale des équations de degré $3n$ jouissant de la propriété que les $3n$ racines se partageront en n groupes, tels que, dans chaque groupe de trois racines réelles, les fractions continues qui représentent ces racines seront terminées par les mêmes quotients.

On voit, en particulier, que les équations du troisième degré qui ont cette propriété sont comprises dans la forme générale suivante :

$$x^3 - yx^2 + \left[\frac{(2a+1)y}{a'} - \frac{3(a^2+a+1)}{a'^2}\right]x - \left[\frac{a(a+1)y}{a'^2} - \frac{(2a+1)(a^2+a+1)}{a'^3}\right] = 0,$$

où a désigne un entier quelconque, a' un diviseur quelconque de a^2+a+1, et y une quantité réelle quelconque, commensurable ou incommensurable. En faisant $y=0$, on obtient la solution du cas particulier que M. Lobatto a examiné.

11. Les équations du troisième degré qui proviennent de la division du cercle en sept ou neuf parties égales, celle du quatrième degré qui provient de la division en quinze parties égales, jouissent de la propriété remarquable qu'on vient d'étudier.

La division du cercle en sept parties égales conduit à l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

et si x désigne la racine positive, $-x_1$ et $-x_2$ les deux racines négatives, on a

$$x_1 = \frac{1}{1+x}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x};$$

la racine x est comprise entre 1 et 2, on aura par conséquent, des résultats de cette forme :

$$x = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6+\dots}}, \quad x_1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6+\dots}}}, \quad x_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6+\dots}}}.$$

La division du cercle en neuf parties égales conduit à l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Si l'on désigne par $-x$ la racine négative, laquelle est comprise entre

-1 et -2, par x_1 et x_2 les deux racines positives, on aura

$$x_1 = \frac{1}{1+x}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{x},$$

ce qui conduit aux mêmes résultats que le cas précédent.

Enfin, l'équation du quatrième degré dont dépend la division du cercle en quinze parties égales, est

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Si x et x_1 désignent les deux racines positives, $-x'$ et $-x'_1$ les deux négatives, on a

$$x = \frac{x'+2}{x'+1} = 1 + \frac{1}{1+x'},$$

$$x_1 = \frac{x'_1+2}{x'_1+1} = 1 + \frac{1}{1+x'_1};$$

des deux quantités x' et x'_1 l'une est comprise entre 0 et 1, l'autre entre 1 et 2, on aura donc des résultats de cette forme :

$$x' = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{6 + \dots}}, \qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{6 + \dots}}},$$

$$x'_1 = 1 + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{6' + \dots}}, \qquad x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{6' + \dots}}}.$$

L'équation proposée résulte de l'élimination de y entre

$$x + \frac{x-2}{x-1} = y, \quad y^2 - y - 1 = 0.$$

EXPÉRIENCES

Sur un nouveau phénomène du frottement de l'eau dans des tubes d'un petit diamètre mouillés de diverses manières;

Par M. Anatole de CALIGNY.

Objet de ces expériences.

Ces expériences ont pour but de constater, au moyen d'un phénomene nouveau et assez singulier, si le frottement de l'eau est plus grand sur des surfaces mouillées pour la première fois par l'eau frottante que sur ces mêmes surfaces préalablement mouillées par diverses méthodes, et de quelle manière ce genre de phénomènes est modifié par le diamètre des tuyaux de conduite, ainsi que par la vitesse de l'eau.

Bossut ayant observé le temps que l'eau mettait à parcourir pour la première fois diverses longueurs d'un canal factice, l'avait comparé à celui pendant lequel ces mêmes longueurs étaient ensuite parcourues lorsque le mouvement était devenu permanent. Il en avait conclu que le frottement de l'eau était moindre contre des surfaces préalablement mouillées. Cette conclusion paraissait être confirmée par les expériences de Du Buat, d'où il résulte que le frottement est indépendant de la matière des tuyaux, dans les limites de ses essais, comme si ce n'était pas contre cette matière, mais contre une *paroi liquide factice*, formée par l'eau sur les parois solides, que s'exerçait le frottement de ce liquide. Enfin, l'existence de cette *paroi liquide* a été confirmée, pour des tubes capillaires, par des expériences sur le mouvement du sang dans le corps des animaux vivants, que l'on doit à des auteurs connus, et dans lesquelles on voit, au moyen du microscope, les globules

liquides *rouler*, en effet, sur une paroi liquide fixe, adhérente à la paroi des veines, au moins pour les petites vitesses.

Cependant la conclusion précédente de Bossut a été contestée encore dans ces derniers temps par des savants très-distingués. Ses expériences n'étaient pas, selon moi, complétement suffisantes, car il n'est pas rigoureux de comparer, dans ce cas, un mouvement plus ou moins variable, plus ou moins influencé par des ondes, à un mouvement parvenu à la permanence. Quant à la *paroi liquide factice*, en supposant son existence bien prouvée pour tous les diamètres, il restait à constater, en définitive, quel genre d'influence elle exerce sur le frottement, dont la nature elle-même n'est pas bien connue et peut varier, sans doute, soit avec celle des parois, soit avec celle du liquide, soit avec les dimensions des tubes et les vitesses du liquide frottant.

Dans les expériences objet de cette Note, on n'a point à s'occuper de l'objection précédente, contre le mode d'observation de Bossut. En effet, c'est un mouvement variable d'une même espèce que l'on observe dans les diverses circonstances à étudier. Ces expériences offrent un avantage particulier, en ce qu'il n'y a personne qui ne puisse en répéter soi-même plusieurs pour quelques centimes. De sorte qu'il sera facile de vérifier, dans tous les cabinets de physique, un phénomène de maximum assez singulier pour attirer l'attention des savants, abstraction faite même de ce qu'il ne s'agit de rien moins que de constater une des bases fondamentales de l'hydraulique.

Préparation aux expériences.

J'enfonce en partie dans un réservoir à niveau constant un tube rectiligne, après avoir bouché le sommet avec la main. La partie inférieure est toujours ouverte, de sorte que l'air contenu dans ce tube est comprimé en vertu de la pression du liquide à cette extrémité. La loi de Mariotte permet de calculer la quantité de liquide entrée ainsi au bas du tube et tenue en équilibre. Quand on ôte la main du sommet, l'air s'échappe et le liquide monte dans le tube; il parvient d'abord à la hauteur du niveau du réservoir, et, en vertu de la vitesse acquise, s'élève ensuite à une certaine hauteur au-dessus.

Il faut un peu d'habitude pour faire convenablement ce genre

d'expériences. Le tube doit être bien en repos au moment où son sommet est débouché. Il faut, de plus, que le doigt ou la main ait serré le sommet avec force, parce qu'il est important qu'il ne pénètre pas plus d'eau à l'extrémité inférieure qu'on ne le veut pour chaque expérience. Aussi, quelque habitude qu'on ait, il est prudent de répéter chaque expérience un grand nombre de fois pendant un temps calme.

Les tubes doivent être autant que possible verticaux, dans les limites dont je parlerai plus loin, pour que la surface supérieure ne soit pas brisée, et que l'on ait moins de difficulté à bien constater la hauteur des niveaux. Cependant il y a des circonstances où il faut étudier le mouvement de l'eau dans des tubes inclinés, ce qui peut se faire d'une manière satisfaisante quand les diamètres ne sont pas trop grands.

Pour calculer la profondeur du point de départ de l'eau au-dessous du niveau du réservoir à l'instant où l'on débouche le tube, je pose les notations suivantes en supposant ce tube vertical; il est facile de voir comment le résultat changera pour un tube incliné :

x profondeur cherchée;

H hauteur de la colonne d'eau qui ferait équilibre dans le vide à la pression atmosphérique ;

L longueur totale du tube rectiligne d'égal diamètre partout ;

l longueur de la portion du tube restée au-dessus du niveau du réservoir et dans laquelle la colonne liquide s'élèvera jusqu'au sommet.

On a évidemment, en vertu de la loi de Mariotte,

$$\frac{x+l}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}+x} \quad \text{ou} \quad x^2 + (\mathrm{H}+l)\,x = (\mathrm{L}-l)\,\mathrm{H},$$

d'où l'on tire

$$x = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+l) \pm \sqrt{(\mathrm{L}-l)\,\mathrm{H} + \tfrac{1}{4}(\mathrm{H}+l)^2}.$$

La racine positive de cette équation exprime la quantité cherchée. Mais il n'est pas nécessaire d'en faire le calcul pour les tubes de verre d'environ 1 mètre de long dont il va être principalement question,

parce qu'on voit immédiatement la longueur occupée par l'eau au bas de chaque tube, pour peu que l'eau du réservoir soit claire. Cette observation immédiate a d'ailleurs l'avantage de tenir compte de la quantité quelconque de liquide entré, abstraction faite de la compression de l'air, si l'on a oublié de présenter le tube verticalement.

Pour les tubes d'un très-petit diamètre et pour les oscillations d'une assez petite course, il faut tenir compte, dans le calcul de la profondeur du point de départ, de la hauteur dont l'eau s'élève au-dessus du réservoir en vertu de la capillarité, au moment où l'on bouche le sommet du tube. Cela se peut pour des tubes de verre; on enfonce d'abord le tube, après l'avoir bouché par le sommet, seulement de la quantité nécessaire pour que le niveau du réservoir soit sensiblement affleuré par le haut de la colonne soulevée en vertu de la capillarité.

L'objet principal consiste, comme on le verra plus loin, à comparer les hauteurs obtenues, soit quand on enfonce le tube avant ou après l'avoir mouillé pendant un temps plus ou moins long, soit surtout lorsqu'avant de boucher son sommet on y a introduit des colonnes d'eau de longueurs diverses et souvent considérables par rapport à celle du tube. Il y a des circonstances où cette dernière précaution augmente singulièrement la hauteur obtenue par la colonne liquide au-dessus du niveau du réservoir, au lieu de la diminuer comme on serait porté à le croire.

J'ai fait aussi des expériences inverses en bouchant le sommet d'un tube de verre rempli d'eau, et voyant à quelle profondeur le tube se vide au-dessous du niveau du réservoir quand on a débouché le sommet. Ces expériences seraient moins intéressantes que les premières pour des raisons que j'expliquerai, si elles n'avaient pas un but différent.

Résultats des expériences.

Les tubes de verre dont je me suis servi avaient un diamètre intérieur à peu près constant; je dis à peu près, parce qu'on sait que les petits tubes de verre sont, en général, un peu coniques. J'en ai étudié

de tous les diamètres et en assez grand nombre, surtout depuis 4 jusqu'à 9 $\frac{1}{2}$ millimètres. J'ai commencé par m'assurer que, plus on enfonçait chaque tube sans y introduire d'eau préalablement, plus l'eau s'élevait au-dessus du niveau du réservoir. Cette précaution est indispensable pour apprécier le phénomène dont il va bientôt être question, car ce qui vient d'être dit n'est pas vrai sans exception pour tous les tubes quand ils sont très-minces. Or il faut que cela se vérifie d'abord, afin qu'on n'attribue pas à une circonstance particulière du genre de celle qui vient d'être signalée, l'augmentation de hauteur provenant d'une colonne d'eau qui diminue cependant la profondeur du point de départ au-dessous du niveau du réservoir. Je dois dire, au reste, que, lorsqu'il y a une exception, cela doit provenir de l'état des surfaces, car je n'en ai jamais bien observé que sur un seul tube de 4 $\frac{1}{2}$ millimètres de diamètre, pour lequel le maximum de hauteur obtenue, qui était de $0^m,093$, correspondait aux trois cinquièmes de l'enfoncement maximum. Je n'ai pu reproduire cet effet, même avec des tubes un peu plus étroits. Seulement, pour les tubes de diamètres analogues, au delà de certaines limites, la hauteur obtenue n'est plus sensiblement augmentée par une augmentation d'enfoncement.

Lorsqu'avant de boucher ces tubes par le sommet, on y introduit de l'eau sur une longueur suffisante en plongeant l'extrémité inférieure dans le réservoir; alors, malgré une diminution considérable de la profondeur du point de départ de l'eau, la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir est, en général, notablement augmentée; de sorte que l'effet de cette colonne liquide, en repos au moment où l'on débouche le tube, fait bien plus que compenser l'effet de la diminution d'élan résultant de sa présence qui diminue la profondeur du point de départ. Voici le premier résultat de ce genre que je montrai, à Saint-Lô, en février 1833, à MM. Dan de la Vauterie et Tostain, ingénieurs en chef des Ponts et Chaussées.

Un tube de verre, de 8 millimètres de diamètre et de 1 mètre de long, comme tous ceux dont il s'agit en ce moment, donnait une hauteur maximum de $0^m,189$ au-dessus du niveau du réservoir, tout le reste du tube étant enfoncé dans l'eau, avec les précautions susdites. En diminuant des deux cinquièmes environ la profondeur du

point de départ au moyen d'une colonne liquide préalablement introduite avant de boucher le sommet, on augmentait cependant de $0^m,027$ la hauteur obtenue dans le premier cas, pour lequel tout enfoncement moindre avait d'ailleurs donné une hauteur moindre au-dessus du même niveau. En réduisant ensuite la profondeur de l'enfoncement, sans colonne préalablement introduite, à la profondeur du point de départ de l'eau dans le second cas, on réduisait la hauteur à $0^m,122$.

En 1837, lorsque je montrai de nouveau cette expérience à diverses personnes dans le jardin de l'École des Mines, j'eus occasion de m'apercevoir que, pour quelques tubes dont les parois avaient moins de $1\frac{1}{2}$ millimètre d'épaisseur, l'augmentation dont il s'agit n'était pas sensible; mais au moins il n'y avait pas diminution, et pour des tubes de l'épaisseur dont il s'agit, l'augmentation était bien constatée. J'ai dernièrement multiplié ces expériences sans pouvoir rencontrer de tubes de diamètres analogues aux premiers, pour lesquels l'augmentation, objet spécial de cette Note, ne se présentât point, souvent meme d'une manière encore plus tranchée. Ainsi un tube de 6 millimètres de diamètre intérieur donnait une hauteur maximum de $0^m,13$ au-dessus du niveau du réservoir sans colonne préalablement introduite, le reste du tube étant plongé. En diminuant de *moitié* la profondeur du point de départ au moyen d'une colonne préalablement introduite, j'augmentais de 3 centimètres la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir. L'épaisseur des parois était de $0^m,0015$. Or j'ai obtenu sensiblement les mêmes résultats avec un tube de même diamètre et dont les parois avaient seulement une épaisseur de $0^m,0005$. Enfin j'ai répété les mêmes expériences avec des tubes de 4 millimètres de diamètre, dont les parois avaient une épaisseur de $\frac{1}{2}$ millimètre pour le premier et de $\frac{1}{4}$ de millimètre au plus pour le second. Dans les deux tubes, j'ai retrouvé une augmentation analogue provenant de la colonne liquide préalablement introduite. Il y avait une augmentation de $2\frac{1}{4}$ centimètres pour une hauteur de $0^m,075$ avec le tube dont les parois avaient 0,0005 d'épaisseur.

J'ai fait aussi, en 1837, des expériences de ce genre avec des tubes d'un diamètre beaucoup plus grand. L'un était un tube de verre conique de $1^m,33$ de long dont le plus grand diamètre était de $0^m,27$,

l'autre, qui était celui du sommet, étant moitié moindre. On pouvait diminuer d'environ un tiers la profondeur du point de départ au moyen d'une colonne liquide préalablement introduite, sans diminuer la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir. L'épaisseur des parois de ce tube était de 5 millimètres.

Les expériences dont j'ai parlé sur des tubes de 8 millimètres de diamètre et au-dessous peuvent être répétées lorsque leur axe est extrêmement incliné. Sous tous les angles pour lesquels l'observation est faite, on retrouve sensiblement les mêmes rapports entre les longueurs de tuyau rempli au-dessus du niveau du réservoir et les longueurs comprises entre le niveau du réservoir et les points de départ, en tenant compte des circonstances dont j'ai parlé. Mais pour des tubes beaucoup plus longs, on conçoit qu'il n'en est plus nécessairement ainsi; la longueur de la colonne liquide préalablement introduite doit avoir moins d'influence quand les tubes sont verticaux. Dans ce cas, la colonne d'air étant beaucoup plus longue, mais aussi la pression sur l'extrémité inférieure beaucoup plus grande, on voit immédiatement que la colonne liquide entrée dans le tube en vertu de la compression de l'air occupe une fraction relativement plus grande que la partie plongée. Je mentionnerai à ce sujet une expérience que je fis en 1837 sur un tube de zinc de 2 mètres de long et de $0^{m},012$ environ de diamètre. Quand ce tube était vertical, la colonne, préalablement introduite comme ci-dessus dans les deux cinquièmes de la partie plongée, n'augmentait pas sensiblement la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir; mais quand le tuyau était très-incliné, on retrouvait les mêmes rapports que pour des tubes de verre de longueur et de diamètre moitié moindres. En calculant la longueur de la colonne liquide entrée d'elle-même en vertu de la compression de l'air, on trouve une longueur qui cependant ne paraît pas suffisante pour produire un effet bien sensible sur la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir, d'après ce qui a été dit sur les diverses longueurs des colonnes liquides préalablement introduites dans les tubes de 1 mètre de long. Or, comme le phénomène dû à cette circonstance se manifestait avec beaucoup d'intensité quand les vitesses étaient moindres par suite de l'inclinaison du tube sous divers angles avec l'horizon beaucoup moindres que la moitié d'un droit, il y a

lieu de croire que ce genre d'effets singuliers ne se présente pas d'une manière aussi sensible pour les grandes vitesses. On conçoit que les grandes vitesses peuvent déplacer à chaque instant la paroi liquide factice, quand ce ne serait que par de petits tourbillons, si elles ne la balayent pas sur des surfaces bien polies. Il ne faut donc pas s'étonner si les phénomènes dépendants de l'existence de cette paroi ne se sont présentés d'une manière remarquable que pour des vitesses médiocres, ou pour des tubes dans lesquels la capillarité jouait un rôle assez sensible. Je dois dire que j'ai dernièrement répété ces expériences avec un tube de plomb de $0^m,011$ de diamètre et de $2^m,90$ de long lié à une pièce de bois, sans avoir remarqué plus d'influence dans l'effet de la colonne préalablement introduite, dans le cas où le tube était très-incliné que dans le cas où il était vertical. Pour les deux cas elle pouvait occuper au moins les deux cinquièmes de la partie plongée sans diminuer la hauteur, qui était de $0^m,27$ quand le tube était vertical. Quand le tube était très-incliné, le rapport de la hauteur à l'enfoncement était, dans tous les cas, très-diminué, mais ce n'était pas à cause de la colonne préalablement introduite.

Ce genre d'expériences n'est pas tout à fait aussi rigoureux que les précédents, il ne faut en admettre le résultat qu'avec réserve; le tuyau de zinc de 2 mètres de long ne restait pas tout à fait rectiligne, et la surface ascendante était ondulée à cause de l'inclinaison du tube.

Je dirai à cette occasion que, lorsqu'une surface ascendante est brisée, on observe quelquefois une persistance singulière dans des mouvements irréguliers en apparence. Ainsi il y a une manière d'enfoncer dans l'eau un gros tuyau de 1 mètre de long et de $0^m,80$ de diamètre, d'où il résulte une dénivellation tournoyante qui s'élève jusqu'au sommet en enveloppant l'air comme une sorte de vis d'Archimede. Quant à la flexion des tubes de zinc de ces petits diamètres, je dois faire observer que cela n'a, en général, qu'une importance secondaire lorsqu'on a soin de retourner le tube autour de son axe, pour voir si cela ne modifie pas sensiblement les rapports entre les hauteurs obtenues au-dessus du niveau et les profondeurs du point de départ calculées en supposant le tube rigide comme la partie qui est hors de l'eau.

Pour que l'on puisse bien observer l'augmentation de hauteur pro-

venant d'une colonne liquide préalablement introduite, il ne faut pas que le tube ait moins d'une centaine de fois la longueur de son diametre. Pour les tuyaux un peu plus gros relativement à la longueur de 1 mètre, l'augmentation n'apparaît plus sensiblement; enfin, si l'on augmente encore le diamètre, il y a, au contraire, une diminution quand on introduit préalablement une colonne liquide. En général, la moindre introduction de ce genre occasionne une diminution de hauteur dans les tubes assez gros pour que le frottement ait peu d'importance relativement à la perte de travail due au phénomène connu sous le nom de *contraction de la veine fluide*. Déjà cela fait présumer que l'effet singulier dont il s'agit ne provient pas de ce phénomène.

Cette présomption est confirmée par les observations; d'où il résulte que l'effet est insensible pour les tuyaux dans les conditions les meilleures, si la colonne préalablement introduite a seulement une longueur qui ne soit pas beaucoup plus grande que celle des ajutages cylindriques ordinaires du diamètre considéré. La seule pression de l'eau sur l'air intérieur des petits tubes mentionnés suffit, en général, pour y introduire une colonne plus longue que ces ajutages. Enfin, pour confirmer la véritable nature du phénomène, j'ai essayé directement de voir s'il serait modifié au moyen d'un entonnoir destiné à diminuer l'effet quelconque de la *contraction* de la veine liquide à son entrée dans le tube. Cet entonnoir était toujours rempli d'eau. Il avait $0^{m},07$ de côté, $0^{m},025$ de diamètre à sa grande base, et se fixait à chaque tube par sa petite base, comme je l'expliquerai plus loin.

Un tube de 7 millimètres de diamètre intérieur et dont les parois avaient 1 millimètre d'épaisseur, fournissait une hauteur maximum de 17 centimètres au-dessus du niveau du réservoir. Une colonne d'eau, préalablement introduite dans les deux cinquièmes de la partie plongée, augmentait cette hauteur de 2 centimètres. En supprimant de nouveau cette colonne et disposant l'entonnoir au bas du tube, on retrouvait la hauteur de 19 centimètres. Enfin, en rétablissant la colonne liquide préalablement introduite, on retrouvait une augmentation de 2 centimètres environ, ce qui portait la hauteur totale à

21 centimètres. On voit que l'entonnoir, en modifiant l'effet de la contraction d'une manière très-sensible, ne modifiait pas d'une manière sensible le phénomène objet spécial de cette Note.

L'entonnoir était en zinc non soudé à sa petite base, l'autre base étant fixée par un *grain de soudure*. De sorte qu'il pouvait servir successivement à plusieurs tubes, au bas de chacun desquels il était fixé avec une mince bande de papier qu'il serrait de lui-même. Je l'ai essayé aussi avec le tube de $9\frac{1}{2}$ millimètres de diamètre, et j'ai retrouvé des résultats analogues quant à son influence. C'est-à-dire que dans ce tube, dont les parois avaient 1 millimètre d'épaisseur, l'augmentation provenant de la colonne préalablement introduite a été indépendante de l'entonnoir. Cette augmentation était d'ailleurs beaucoup moins apparente que pour des tubes plus étroits, abstraction faite de l'entonnoir; elle n'était que de 5 millimètres sur 23 centimètres.

On sait que dans les ajutages ordinaires, quand on est parvenu à faire détacher la veine liquide des parois, la moindre percussion suffit pour l'y faire adhérer de nouveau. Or, dans les tubes verticaux dont il s'agit, la veine supporte la pression d'une colonne liquide verticale de hauteur variable, qui contribue sans doute à produire cet effet. Il n'est donc pas étonnant que les phénomènes dont il s'agit dans cette Note ne proviennent pas de la *contraction* de la veine liquide.

Ayant pensé que l'influence de la colonne liquide préalablement introduite provenait de ce qu'elle formait une paroi liquide factice, j'ai étudié avec une nouvelle attention ce qui arrivait lorsqu'elle était supprimée, en faisant osciller l'eau dans les mêmes tubes de verre de 1 mètre de long et de diamètres divers. J'ai constamment trouvé que, les tubes n'étant pas du tout mouillés d'avance, l'eau montait moins haut, toutes choses égales d'ailleurs, que lorsqu'ils avaient été mouillés par plusieurs ascensions successives, ou parce qu'on les avait longtemps plongés dans l'eau. Il faut, en général, trois ou quatre ascensions successives pour que les hauteurs obtenues soient ensuite toujours les mêmes. La première ne suffit pas toujours pour qu'il en résulte une augmentation sensible dans la deuxième. La troisième s'élève toujours plus haut que la deuxième. Pour les tubes minces de 8 millimètres de diamètre et au-dessous, dont j'ai le plus spéciale-

ment parlé, l'augmentation définitive est notable; elle s'est souvent élevée à 1 centimètre au moins. Mais elle est, en général, bien moindre que le surcroît de hauteur provenant, pour des tubes d'abord bien mouillés de cette manière, de l'effet de la longue colonne préalablement introduite. Cette augmentation s'est trouvée également indépendante de l'entonnoir toujours rempli d'eau. La durée de l'ascension ne paraissait pas différer beaucoup de 1 seconde.

J'ai fait des observations analogues sur un tube de fer-blanc de $0^m,006$ de diamètre et d'une longueur de $0^m,97$. Mais, dans ce tube, la colonne préalablement introduite n'augmentait pas la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir; elle ne la diminuait pas non plus quand elle n'occupait qu'environ les deux cinquièmes de la partie plongée.

En définitive, il ne suffisait pas que les tubes de verre fussent, avant l'expérience, mouillés et même plongés assez longtemps pour que l'on obtînt le maximum d'effet. Dans les expériences microscopiques sur le mouvement du sang dont j'ai parlé, et dont M. Poiseuille a eu la complaisance de me montrer quelques-unes, l'épaisseur de la paroi liquide factice en repos était très-sensible, ce qui s'accorde avec ces faits.

Pour constater l'épaisseur de la paroi liquide dans mes expériences, j'ai pris un gros tube de verre de $0^m,025$ de diamètre et de $1^m,30$ de long. Je l'ai rempli d'eau en le bouchant avec la main par le sommet. Je l'ai presque entièrement tiré de l'eau du réservoir, je l'ai débouché subitement après l'avoir tenu en repos, et j'ai remarqué, en l'observant un peu incliné, que le liquide resté adhérent aux parois bien polies après la descente de la colonne liquide, coulait pendant quelques secondes, même avec assez de force. Il n'est donc pas étonnant que quelques instants de repos suffisent pour modifier d'une manière importante la nature du frottement d'une colonne liquide contre les parois d'un tuyau.

J'ai fait quelques expériences avec plusieurs des tubes d'un petit diamètre de 8 millimètres et au-dessous, dont j'ai parlé, afin de voir à quelle profondeur ces tubes se vidaient au-dessous du niveau du réservoir quand on les débouchait après les avoir remplis d'eau et

tenus en partie plongés. Il se présente un phénomene intéressant lorsque, le tube étant vertical, la moitié environ de sa longueur est sortie de l'eau. La colonne liquide, en descendant avec vitesse, ne le vide pas sans laisser une sorte de paroi liquide factice adhérente aux parois solides. Mais cette paroi liquide assez épaisse tombe ensuite par son propre poids en suivant la colonne descendante; or, comme son épaisseur n'est pas très-petite par rapport à la section des tubes, il en résulte qu'en descendant moins vite que le centre de la colonne, elle enveloppe de l'air. De sorte qu'on voit de fortes bulles enfoncées quelquefois sous des colonnes liquides partielles de plusieurs centimètres de haut. Pour des tubes de $0^{m},025$ de diamètre, il y a encore un bouillonnement à la circonférence. Ces effets confirment bien tout ce que j'ai dit dans cette Note, mais ils jettent de l'incertitude sur la mesure exacte de la longueur de tuyau vidée au-dessous du niveau du réservoir, quand on veut comparer les effets à ceux que l'on obtient au moyen d'une colonne liquide ascendante dont la surface repousse l'air de bas en haut *sans se laisser diviser,* et en restant même, dans divers cas, assez sensiblement horizontale.

Au reste, la comparaison des effets obtenus par les deux méthodes ne serait pas, à beaucoup près, aussi simple que pour les premières expériences mentionnées ci-dessus. En effet, dans ces premières expériences, c'est une *même colonne liquide, passant par le même orifice, dans le même sens,* dont on étudie les effets dans diverses circonstances; tandis que, pour comparer des mouvements en sens contraires, il faut, dans un cas, étudier la perte de vitesse à la rentrée de l'eau dans le réservoir, et, dans l'autre, la *contraction* de la veine à l'entrée de l'eau dans le tube. Cela conduit, avec les variations de longueur des colonnes frottantes dans des sens différents, à des considérations trop délicates pour que je les expose dans cette Note, d'autant plus qu'elles ne sont pas indispensables pour établir les conclusions. Je dirai seulement que, dans le cas où la partie du tube plein d'eau qui reste au-dessous du niveau du réservoir est assez petite par rapport à celle qui reste en dessus, il n'y a plus aucun rapport entre la profondeur abandonnée par la colonne descendante au-dessous de ce niveau, et la hauteur obtenue au-dessus, quand on retourne le tube de haut en bas, pour y faire monter l'eau comme dans toutes les expériences

objet de cette Note. Alors la force vive du système ayant un de ses facteurs, la masse, beaucoup moindre à la fin de l'expérience que dans le cas de l'ascension, la perte provenant de la vitesse avec laquelle l'eau rentre dans le réservoir en s'y dispersant, devient énorme par rapport aux autres résistances passives.

D'après tout ce qui précède, je pense que les exceptions dont j'ai parlé pour le mouvement de bas en haut au commencement de cette Note, dépendent essentiellement de l'état des parois, ce qui n'est pas en désaccord avec ma conclusion sur l'influence des parois plus ou moins mouillées; et d'ailleurs, dans les circonstances où elles se sont présentées, la colonne liquide préalablement introduite n'occupait jamais la moitié de la longueur totale du tube. On conçoit, il est vrai, que la paroi liquide factice qui résulte de cette colonne dans une partie notable du tube, peut exercer une influence quelconque sur la formation du reste; mais les choses ne se passeront point cependant de la même manière que pour un mouvement engendré dans un tube déjà entièrement plein d'eau. Il n'est donc pas étonnant que, même pour un égal degré de poli apparent, il y ait quelque différence essentielle dans l'état des surfaces frottantes.

Au reste, quand il y aurait quelque différence provenant de l'épaisseur des parois, nous avons vu qu'elle ne devait pas être attribuée à la *contraction* de la veine liquide; les phénomènes se reproduisent d'ailleurs dans le même ordre quand on change divers tubes de bout et qu'on les incline sous divers angles, même lorsqu'une des extrémités est coupée en biseau. Je suppose maintenant qu'il y ait, à la rigueur, quelque différence dans la hauteur obtenue par suite d'un état de *vibration* des parois, et je dis que cela même est plutôt à l'avantage de ma conclusion. En effet, il résulte des expériences de F. Savart que, si l'on frotte longitudinalement un cylindre, les vibrations se transmettent graduellement de la surface frottée à l'intérieur. On concevrait donc que des parois très-minces pussent vibrer avec plus d'intensité que des parois plus épaisses, si l'on admettait que le simple frottement d'une colonne liquide ascendante suffit pour produire des effets de vibration appréciables dans ce sens. Or je suppose que, pour exagérer ces effets, on conçoive le tuyau animé d'un mouvement ondulatoire analogue à celui d'un fouet. Ce mouvement paraîtrait

devoir tendre à séparer la paroi solide de la paroi liquide factice, et à diminuer d'une quantité quelconque les effets de celle-ci. L'hypothese de l'influence des vibrations n'est donc pas contraire au phénomène dont il s'agit, quand même on la supposerait sérieusement admissible dans cette circonstance pour des tubes à parois très-minces.

L'air comprimé s'échappe subitement quand on débouche le sommet du tube. Il tend à faire une sorte de vide en vertu du mouvement acquis par sa dilatation suivie elle-même par une compression, et ainsi de suite. Il faut se rendre compte de ces effets dans les diverses circonstances dont il s'agit. Quant aux tubes de 1 mètre de long, on voit immédiatement que le travail employé à comprimer l'air est très-peu de chose par rapport au travail moteur ou résistant, développé pendant l'ascension du liquide. Si l'on admettait que le *souffle* de la colonne d'air fût suffisant pour modifier l'humidité des parois, cela rentrerait encore dans l'ordre d'idées que j'ai présenté sur l'influence d'une paroi liquide. Mais il ne paraît pas que cela soit admissible, puisque l'inclinaison de divers tubes de 1 mètre de long, même sous des angles très-petits avec la surface du réservoir, ne change pas la nature du phénomène de maximum, objet spécial de cette Note. Il n'y a pas à s'occuper non plus de cette considération relativement aux tubes de 2 et de 3 mètres de long, dont j'ai parlé, pour le cas où ils étaient très-inclinés.

Avec un tuyau en zinc de $4^{m},165$ de long et $0^{m},05$ de diamètre, j'ai fait l'observation suivante sur le mouvement des poussières adhérentes aux parois: au moment où j'ôtais la main du sommet de ce tuyau enfoncé verticalement dans un grand réservoir, on entendait comme une brusque détonation provenant de l'explosion de la colonne d'air comprimé. Mais il était impossible, même en réunissant deux observateurs, de voir aucun mouvement de va-et-vient vertical dans les poussières balayées par le mouvement de l'air qui sortait comme du tuyau d'une machine soufflante. Cependant le mouvement de ces poussières était très-facile à observer, malgré la durée assez courte de l'ascension de la colonne liquide qui les chassait comme un piston liquide. A la sortie du tuyau, on voyait très-distinctement la colonne d'air chargée de poussières affecter une forme bien cylindrique jusqu'à une certaine distance du sommet de ce tuyau, et se disperser ensuite

sous une forme analogue à celle d'une sorte de flamme. La durée de l'explosion était insignifiante par rapport à la durée totale de l'ascension. De sorte qu'on n'a sans doute à s'occuper du mouvement de la colonne d'air que relativement à la résistance qu'elle fait éprouver par son frottement et son inertie, en un mot par l'ensemble quelconque des résistances passives qu'elle occasionne comme dans le tuyau d'une machine soufflante, résistances qui sont, en définitive, petites par rapport au frottement de la colonne d'eau dans le même tuyau, selon toutes les expériences connues.

En supposant, au reste, que cette résistance fût plus notable, il n'en resterait pas moins le fait d'une colonne liquide en mouvement dans mes nombreux tubes de 1 mètre de long ou dans le tube de 2 mètres de long très-incliné, et qui, cependant, monte à une hauteur moindre que lorsqu'elle part du repos. Or la longueur de la colonne d'air à chasser est la même à partir du moment où je compare les effets, et, de plus, pour le cas de la colonne liquide en mouvement, l'inertie de la colonne d'air est déjà vaincue.

Il se rattache une question intéressante à celle des mouvements de l'air dont je viens de parler. Poisson, dans la seconde édition de son *Traité de Mécanique,* révoque en doute le principe de l'égalité de pression pour les gaz dans les vibrations rapides. Si le seul frottement de l'eau dans un tube vertical où elle descend suffit pour produire l'effet que j'ai décrit et qui rend la colonne liquide en partie gazeuse, on conçoit que la détente dont je viens de parler, et qui est une véritable explosion, doit occasionner à l'intérieur de la colonne d'air des mouvements qui, eux-mêmes, dénaturent le mode de la détente et peuvent absorber une partie considérable du travail disponible dans l'air comprimé. Il n'est donc pas étonnant que la dilatation de cet air n'ait été suivie d'aucun mouvement de rentrée visible même pour des personnes ayant quelque habitude des observations, la durée des oscillations d'une colonne d'air étant d'ailleurs bien moindre, comme on sait, que celle des oscillations d'une colonne d'eau de même longueur. Par cette raison même, il serait intéressant de répéter cette expérience sur un tuyau beaucoup plus long. En effet, si la durée théorique des oscillations de la colonne d'air était assez sensible pour que l'on fût certain d'avoir le temps d'observer les mouvements de va-

et-vient des poussières, dans le cas où ce genre de mouvement aurait quelque étendue, on aurait ainsi un moyen convenable de se former une idée des limites dans lesquelles l'hypothèse de Poisson peut avoir de l'importance quant aux pertes de force vive.

Les observations précédentes ont été faites sur un tuyau en zinc de $0^m,05$ de diamètre. Ce tuyau était trop gros par rapport à sa longueur, pour que l'on pût répéter les expériences sur l'influence de la colonne liquide préalablement introduite. Il est évident, à priori, que si le phénomène spécial dû à cette colonne ne provient essentiellement que des frottements, il faut que leur travail résistant soit assez grand pour qu'une diminution convenable dans leurs coefficients quelconques puisse compenser la diminution du travail moteur qui résulte immédiatement de son introduction préalable à la partie inférieure du tuyau. Il ne suffit pas même que, pour des diamètres de diverses grandeurs, on augmente la longueur du tuyau proportionnellement à son diamètre, puisqu'il résulte de diverses expériences connues, notamment de celles de Du Buat, que les *coefficients* des frottements diminuent quand les diamètres augmentent. Enfin, il faut tenir compte, ainsi que je l'ai dit, de la manière dont l'eau pénètre d'elle-même au bas du tuyau en comprimant l'air. Il ne faudrait pas, dans tous les cas, attacher beaucoup d'importance aux comparaisons des hauteurs obtenues dans des tubes de diamètres différents, abstraction faite de la difficulté qu'il y a à mesurer exactement les diamètres intérieurs des tubes très-minces, surtout quand les parois ne sont pas transparentes. Si le degré de poli des surfaces exerce de l'influence sur les coefficients des frottements dans ces expériences où les tubes ne sont pas complétement mouillés, il n'est pas étonnant que des différences insignifiantes dans les diamètres correspondent à des différences très-sensibles dans les hauteurs obtenues au-dessus du niveau du réservoir.

J'ai recommencé la série d'essais objet spécial de cette Note, avec un tuyau vertical en zinc de 4 mètres de long et de $0^m,027$ de diamètre. La colonne liquide préalablement introduite dans les deux cinquièmes de la partie plongée n'a pas augmenté la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir; il y a même eu une diminution de $0^m,027$ sur $0^m,918$ de hauteur obtenue au-dessus du réservoir. J'ai regretté

de ne pouvoir faire l'expérience avec le même tuyau très-incliné, mais pour cela il aurait fallu un bâti destiné à le soutenir. J'ai fait aussi une série d'expériences avec un tube de plomb vertical de $2^m,70$ de long et de $0^m,0135$ de diametre; l'introduction préalable d'une colonne liquide dans les deux cinquièmes environ de la partie plongée n'a pas diminué sensiblement la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir. S'il y a eu une diminution, elle a été tout au plus de 2 millimètres sur une hauteur maximum de 30 centimètres.

Il résulte de la série d'expériences sur le tube en zinc de 2 mètres de long dont j'ai déjà parlé, que l'inclinaison aurait peut-être modifié les effets dans le sens dont il s'agit en diminuant les vitesses. On explique ordinairement, d'après Du Buat, le terme de l'expression de la résistance en frottement dans un tuyau de conduite proportionnelle au carré de la vitesse, au moyen de la percussion du liquide contre les aspérités des parois, le terme de la résistance proportionnelle aux simples vitesses étant censé expliqué au moyen des phénomènes de l'adhérence. Or on sait que ce dernier terme absorbe le premier dans les tubes d'un très-petit diamètre. Il est donc rationnel de penser que les effets dus spécialement à ces phénomènes apparaissent avec d'autant plus d'intensité, toutes choses égales d'ailleurs, que les vitesses sont moindres et les tubes plus étroits dans certaines limites. Or c'est précisément ce qui se présente dans l'ensemble des phénomènes que j'ai observés.

L'exception toute particulière dont j'ai parlé pour un tube d'un très-petit diamètre pourrait indiquer des phénomènes essentiellement relatifs aux tubes d'un petit diamètre, abstraction faite de la colonne liquide préalablement introduite. Mais ce qui précède suffit pour établir l'influence de la couche d'eau adhérente aux parois dans certaines circonstances, et comme les causes en apparence les moins importantes suffisent pour modifier les phénomènes, je m'en tiens d'ailleurs aux faits observés, dans les limites où les observations ont été faites.

Je regrette de n'avoir pas eu occasion de répéter les expériences dont il s'agit dans un liquide non susceptible de mouiller les parois des tubes. Si une colonne de ce liquide préalablement introduite ne

donnait lieu à aucune augmentation de hauteur dans un même tube pour lequel cette augmentation se serait présentée déjà dans l'eau, ce résultat viendrait sans doute à l'appui des précédents. Il pourrait cependant se présenter un résultat différent sans que ma conséquence fût infirmée. En effet, il ne paraît pas impossible que, *dans l'état de repos alternatif*, le liquide pénètre d'une manière plus intime entre les aspérités des parois, de façon à les *tapisser* d'une manière quelconque sans les *mouiller* d'une manière proprement dite. On conçoit que la colonne liquide pourrait aussi pendant l'état de repos contracter, avec cette espèce de paroi liquide alternativement formée et détruite, une sorte d'*engrenure* plus intime, de manière à composer une sorte de paroi liquide plus sensible, mais qui, ne mouillant pas les parois solides, retomberait aussitôt que le tube serait vide. Il ne m'a donc pas semblé indispensable de faire les nouvelles expériences que je viens d'indiquer, puisque les faits observés suffisent pour établir mes conclusions. Il serait même assez délicat d'interpréter rigoureusement les résultats obtenus avec des liquides différents. On ne sait pas bien de quelle manière, pour un liquide non encore soumis à une longue série d'expériences toutes spéciales, le frottement sur une sorte de paroi factice ainsi formée de ce liquide serait influencé relativement aux effets d'une paroi solide bien polie.

Il ne faut pas confondre la série d'expériences objet spécial de cette Note, avec une autre série d'expériences, qui serait très-secondaire, c'est-à-dire quant aux phénomènes dont il s'agit, en ce sens que la marche des résultats pourrait être prévue par la théorie, abstraction faite de ces phénomènes; en voici la description succincte. Après avoir noté la hauteur à laquelle l'eau monte au-dessus du niveau du réservoir sans colonne liquide préalablement introduite, on recommence l'expérience avec le même tuyau, mais en ajoutant à son extrémité inférieure un tuyau de même diamètre toujours rempli d'eau. Dans l'expérience dont je vais parler, il n'y avait pas d'entonnoir au bas du tuyau pour diminuer l'effet de la contraction de la veine liquide. L'effet du bout ajouté inférieurement augmente la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir pour une même profondeur du point de départ du sommet de la colonne liquide. On peut ainsi augmenter de plus en plus la longueur du tuyau inférieur

toujours rempli d'eau, jusqu'à une certaine limite au delà de laquelle une plus grande augmentation de longueur diminue la hauteur obtenue, la ramène graduellement à la hauteur primitive, si l'on allonge le tuyau de plus en plus, et finit même par diminuer cette hauteur. Cette série d'expériences se fait très-facilement avec les divers tubes de verre de 1 mètre de long, dont j'ai parlé ci-dessus. On remarque aussi un effet analogue, mais bien moins sensible, quand il y a un entonnoir, sans doute par suite d'un reste de contraction. Il paraît que l'entonnoir dispose d'une façon particulière l'ordre des vitesses des filets du centre à la circonférence, et que si une assez longue colonne préalablement introduite se trouve au-dessus, cela modifie encore le frottement influencé par cet ordre [*]. On conçoit que si, abstraction faite de la *contraction* proprement dite, l'entonnoir dispose l'ordre des vitesses du centre à la paroi d'une manière qui diminue le frottement, cet effet est modifié d'une manière désavantageuse quand l'eau affluente rencontre au-dessus d'elle une colonne liquide qu'il s'agit de soulever, au lieu de s'élever plus librement précédée d'une

[*] Un tuyau de zinc vertical de $4^m,165$ de long et d'un peu moins de $0^m,05$ de diamètre, portant à son extrémité inférieure un entonnoir, même assez mal fait, dont la tubulure trop large était fixée au tuyau par des bandes de carton, était enfoncé avec les précautions susdites dans un des bassins Saint-Victor, l'entonnoir étant seul préalablement rempli d'eau, sauf une petite longueur déterminée pour chaque essai. Au moment où l'on débouchait le sommet, l'eau s'élevait au-dessus du niveau du réservoir à une hauteur de $1^m,40$ au moins, la longueur de la partie du tuyau enfoncée au-dessous du niveau du réservoir étant de $2^m,67$. Cette expérience, que j'ai faite il y a très-longtemps, est une de celles qui sont mentionnées au tome III de ce Journal, page 233. Il en résulte, comme on peut le voir en faisant le calcul de la profondeur du point de départ de l'eau, et de la hauteur à laquelle elle devrait arriver, d'après les autres expériences que j'ai rapportées dans le tome III, pour des tuyaux beaucoup plus longs, que les coefficients des résistances passives sont bien moindres dans ces tuyaux courts. Il est à remarquer que dans ces derniers cependant les surfaces ne sont pas mouillées d'une manière aussi complète, puisqu'ils sont vidés alternativement. Il y a donc lieu de penser, d'après les faits rapportés dans cette Note, que s'il en est ainsi dans des courses d'oscillations analogues, et pour des diamètres peu différents dans l'un et l'autre cas, cela doit provenir, au moins en partie, de l'ordre des vitesses du centre à la paroi qui s'établit à l'entrée des tubes verticaux et se conserve, au moins jusqu'à un certain point, peut-être même à la limite de la course de l'oscillation ascendante.

colonne d'eau très-courte d'abord, entrée d'elle-même en vertu de la pression de l'eau sur l'air intérieur.

Il est facile de démontrer, comme je l'ai d'ailleurs fait dans mes précédents Mémoires, que s'il n'y avait d'autre résistance passive qu'un frottement proportionnel à chaque instant au produit de la longueur de la surface frottante par le carré de la vitesse, la hauteur obtenue au-dessus du réservoir serait indépendante de la longueur de la portion du tuyau toujours remplie d'eau au-dessous du point de départ de la surface ascendante, la diminution des carrés des vitesses étant compensée par l'augmentation de longueur des surfaces frottantes. Mais rien ne compense la diminution des résistances *locales* principalement fonction du carré de la vitesse. Il en résulte que, par exemple, la perte provenant de la contraction de la veine est diminuée en vertu de l'augmentation de la longueur du tuyau, sans que pour cela il soit nécessaire qu'il y ait rien de changé dans la nature même de la contraction. Or, au delà de certaines limites de diminution dans les vitesses, la partie de la résistance en frottement, qui n'est pas proportionnelle au carré de la vitesse, devient de plus en plus apparente. Il y a donc une raison pour qu'au delà de certaines limites il soit plus désavantageux, quant à la hauteur obtenue, d'allonger le tuyau, qu'il ne l'est de diminuer par cet allongement les résistances purement *locales*, je veux dire les résistances qui ne sont pas proportionnelles à la longueur du tuyau [*].

Ce qui vient d'être dit montre de quelle manière agissent les résis-

[*] La série d'expériences dont je viens de parler n'a qu'une importance très-secondaire par rapport à l'objet de ce Mémoire, mais elle est utile pour l'appréciation des effets de diverses machines hydrauliques. Il ne faut pas la confondre avec la remarque faite depuis longtemps sur le maximum de longueur qu'il convient de donner au tuyau de conduite du bélier hydraulique. Plus ce dernier tuyau est long, plus il y a de frottement, quoique les autres résistances passives à la sortie de l'eau ne varient pas beaucoup pour des vitesses moyennes analogues. Mais le nombre de périodes du bélier hydraulique varie en sens inverse de cette longueur. On rentre donc, pour le calcul des dimensions de cette dernière machine, dans les principes du calcul d'effet maximum que j'ai présentés dans ce Journal, tome XII, page 89, et qui peuvent servir à étudier divers autres systèmes, où chaque changement de période correspond à une perte de travail.

tances *locales* immédiatement dépendantes de la vitesse avec laquelle l'eau entre dans le tube. Il en résulte que, pour apprécier dans chaque circonstance l'effet de la contraction, il faudrait connaître la loi selon laquelle varie la vitesse de la colonne oscillante. Si, par exemple, dans un cas où la colonne monte plus haut en parcourant un chemin moindre, on ne sait pas selon quelle loi varient les vitesses, il est difficile de dire quelle sera la quantité de travail absorbée par la contraction. Ainsi, quand on trouvera pour de plus gros tuyaux, dans des circonstances particulieres, quelques différences sur l'effet de la colonne liquide préalablement introduite qui sembleront provenir de la présence de l'entonnoir, on ne sera pas en droit d'en conclure qu'il en résulte une différence dans la nature même de la contraction, dans la convergence, le croisement des filets, etc. Il est d'ailleurs facile de voir que plus le tuyau est court par rapport à son diamètre, plus la différence qui résulte de la présence de l'entonnoir est relativement sensible. Le travail résistant de la contraction, s'il n'y avait aucune autre cause de résistance passive, s'exercerait avec toute son intensité en ce qu'il diminuerait seul les vitesses. Or il résulte de l'expérience secondaire dont je viens de parler, que si l'on coupait la partie du tube contenant la colonne préalablement introduite, on augmenterait le travail en résistances passives provenant de la contraction. Ainsi ce phénomene, abandonné à lui-même quand il n'y a pas de colonne préalablement introduite, est modifié par cette colonne; mais c'est à cause de la diminution des vitesses relativement au cas où cette partie est coupée plutôt que par suite de quelques différences dans la nature même de la contraction.

En définitive, j'attache moins d'importance aux expériences comparatives faites avec l'entonnoir et difficiles à interpréter rigoureusement, qu'à celles d'où il résulte que, pour produire un effet sensible, *il faut que la colonne liquide préalablement introduite ait une longueur beaucoup plus grande que celle d'un ajutage cylindrique ordinaire du diamètre du tuyau employé.* Il s'agit, bien entendu, de l'hypothèse pour laquelle c'est dans un même tuyau que l'on étudie les oscillations de courses diverses, afin de n'avoir à s'occuper que d'une colonne d'une longueur donnée, considérée dans ses divers états, et non de colonnes de longueurs diverses, comme

pour l'expérience secondaire avec laquelle je viens d'avertir qu'il ne fallait pas confondre celle qui fait l'objet spécial de cette Note. Ces explications vont d'ailleurs jeter du jour sur la manière d'apprécier cette expérience fondamentale.

Étant donnée la hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir lorsqu'il y a une colonne liquide préalablement introduite dans la partie inférieure du tube, il n'est pas étonnant que l'on diminue cette hauteur en coupant cette partie inférieure jusqu'au point d'où part la surface de cette colonne. Cela rentre tout à fait dans l'expérience secondaire dont je viens de rendre compte, et dont la marche générale n'est qu'une confirmation d'un fait théorique. Ce qui est intéressant, c'est de voir dans un même tuyau de dimensions fixes, dont la partie plongée est la même dans les deux cas, la hauteur obtenue par une colonne d'eau qui était déjà animée d'une vitesse notable, être *dépassée* par celle d'une colonne d'eau qui était d'abord en repos au moment où son sommet était précisément à la même place que celui de la colonne en mouvement, et dont la vitesse croît graduellement ensuite en passant sur les mêmes surfaces frottantes, tandis que l'entrée de l'eau se fait au bas du tube par le même orifice. En supposant même que la hauteur obtenue au-dessus du niveau peut être un peu influencée par la manière dont la variation des vitesses modifie le travail résistant de la *contraction*, si la nature de ce dernier phénomène ne change pas, la hauteur de la colonne partant du repos ne peut évidemment dépasser l'autre que si la nature du frottement est modifiée. Or, en considérant comme je le fais la question sous ce dernier point de vue, il faut encore examiner ce qui peut dépendre du rapport du chemin parcouru au diamètre du tube, abstraction faite de la colonne liquide préalablement introduite.

Il résulte, en effet, de mes précédentes recherches, et notamment des Mémoires publiés dans les tomes III et VI de ce Journal, que les coefficients des frottements sont, en général, moindres dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement permanent, mais seulement dans certaines limites. Quand le rapport de la course de l'oscillation au diamètre du tuyau augmente, la différence dans les coefficients dont il s'agit diminue de plus en plus, et finit par devenir peu sensible. Il faut donc voir si l'augmentation de hauteur obtenue

au-dessus du niveau du réservoir par l'effet de la colonne liquide préalablement introduite ne pourrait pas provenir de cette cause. Voilà précisément par quelle raison j'ai commencé par dire qu'il était d'abord indispensable de s'assurer que, abstraction faite de cette colonne préalablement introduite, le maximum de hauteur obtenue au-dessus du niveau du réservoir correspondait au maximum de profondeur du point de départ au-dessous de ce même niveau. Le rapport des courses au diamètre du tube dépassait d'ailleurs, dans tous les cas, celui pour lequel j'avais trouvé dans de plus gros tuyaux que l'on était déjà en dehors des limites pour lesquelles il y avait à s'occuper sérieusement de cette considération.

Au reste, pour fixer les idées, j'ajouterai que j'ai pris le tube de verre de 7 millimètres de diamètre intérieur avec son entonnoir fixe au bas pour diminuer la contraction de la veine liquide à l'entrée; j'ai successivement essayé de tous les enfoncements sans colonne préalablement introduite, excepté dans l'entonnoir. Les enfoncements ont varié de décimètre en décimètre, depuis 1 jusqu'à 8. Les hauteurs obtenues au-dessus du niveau du réservoir ont été successivement de $0^{m},06$, $0^{m},10$, $0^{m},135$, $0^{m},155$, $0^{m},17$, $0^{m},1825$, $0^{m},1875$, $0^{m},19$ [*].

[*] Si l'on voulait comparer ces chiffres avec la marche qu'ils sembleraient devoir suivre, d'après les formules que j'ai données pour de plus gros tuyaux, on serait étonné de voir qu'ils augmentent plus rapidement qu'ils ne paraissent, au premier aperçu, devoir le faire. Mais aussi les premiers chiffres sont assez petits, ce qui provient des résistances particulières aux tubes d'un très-petit diamètre. On sait, comme je l'ai déjà rappelé, que, dans ces tubes, le coefficient du frottement supposé proportionnel aux simples vitesses prend de la prépondérance par rapport à celui du terme de la résistance passive supposée proportionnelle aux carrés de ces vitesses. On est conduit à en conclure qu'il est rationnel de trouver que, dans le cas où les vitesses augmentent, les résultats successifs doivent augmenter plus rapidement que ne l'indiquaient les formules que j'ai établies spécialement pour le cas où l'on n'avait pas à s'occuper sérieusement du premier terme de l'expression des frottements. On conçoit aussi que, si, malgré l'entonnoir, il faut tenir compte d'un reste de contraction qui n'est pas entièrement annulée, plus le tube augmente de longueur quant à la partie remplie alternativement, plus la résistance en frottement augmente relativement à celle qui résulte de la contraction, de sorte que l'importance relative de celle-ci est de plus en plus diminuée.

Pour discuter complétement ces expériences, il faudrait lire mes précédents Mémoires; je n'entrerai donc pas ici dans plus de détails, puisque d'ailleurs mes conclusions sont suffisamment établies. Il est cependant intéressant de remarquer que la marche des chiffres que je viens de transcrire, achèverait au besoin de rassurer, pour peu que l'on hésitât à admettre que l'effet de l'expérience, objet spécial de cette Note, vient principalement des phénomènes de l'adhérence contractée par une colonne liquide préalablement introduite et qui se trouve *en repos* au moment du départ de l'oscillation ascendante. Il suffit, au reste, de remarquer sans calcul que même avec l'entonnoir, plus la profondeur du point de départ au-dessous du niveau du réservoir augmente, plus la hauteur obtenue au-dessus du même niveau augmente aussi, quand il n'y a pas de colonne préalablement introduite.

On ne doit pas oublier, relativement à tout ce qui précede, avec quelle extrême réserve il faut s'en tenir aux faits observés, et autant que possible, dans des *tubes verticaux de verre*. Les résultats, en apparence les plus simples, sont encore assez difficiles à bien interpréter.

Résumé et conclusions.

Dans certaines limites, une même colonne d'eau, partant du repos dans un tube vertical ouvert à ses deux extrémités, monte cependant plus haut au-dessus du niveau du réservoir que lorsqu'elle était parvenue au point d'où elle part animée d'une vitesse notable qu'elle avait acquise en s'élevant de plus bas. Ce phénomène ne provient essentiellement ni de ce qu'on nommait avant F. Savart *contraction de la veine liquide,* ni des vibrations des parois, ni des effets de l'air sortant comme du tuyau d'une machine soufflante; il provient essentiellement d'une différence dans le mode d'action des frottements de l'eau contre la paroi de chaque tube. Cette différence peut être influencée d'une manière quelconque par des phénomènes de frottement que j'ai depuis longtemps signalés pour les tuyaux de diamètres plus grands, et qui proviennent du mode de distribution des vitesses du centre à la paroi, par suite du chemin parcouru relativement au diametre. Mais ils dépendent principalement des effets de la couche

d'eau adhérente aux parois et qui ne se forme convenablement que dans l'état de repos d'une colonne liquide préalablement introduite.

Abstraction faite même des effets essentiels de l'adhérence plus intime contractée pendant l'état de repos, le frottement est bien sensiblement moindre dans un tube mouillé d'avance que lorsque le même tube est mouillé pour la première fois par une colonne d'eau ascendante. Mais dans des phénomènes aussi délicats que ceux du mouvement moléculaire des liquides, il est prudent de s'en tenir aux faits observés. Ainsi ce qui vient d'être dit ne s'applique qu'aux vitesses de l'eau analogues à celles qui sont étudiées dans cette Note; toute autre conséquence serait prématurée. Il n'est nullement prouvé que, pour de grands diametres et pour de grandes vitesses, on retrouve, du moins sous une forme analogue, la série de phénomènes que j'ai décrits ci-dessus; je suis même porté à croire qu'il n'en est pas ainsi.

On voit avec quelle extrême réserve il faut accueillir les recherches purement théoriques qui peuvent être présentées sur des phénomènes aussi peu connus que ceux du frottement des liquides [*].

[*] Dans le Mémoire sur le mouvement des ondes que j'ai publié dans le tome XIII de ce Journal, page 91, je n'ai parlé que des observations de M. Aimé sur l'onde à double mouvement *oscillatoire* et *orbitaire*, comme ayant été faites avant les miennes, sans être d'ailleurs, selon moi, tout à fait suffisantes pour établir la réalité de cette onde. Je ne connaissais pas alors un Mémoire de M. Airy, publié, en 1835, dans l'*Encyclopædia metropolitana*, tome V, article *Tides and waves*, dans lequel ce savant célèbre donne, en anglais, pages 344 et 345, une analyse de l'ouvrage allemand des frères Weber sur les ondes. On y voit que ces physiciens avaient observé, avant M. Aimé lui-même, l'onde à double mouvement *oscillatoire* et *orbitaire*, mais seulement pour le cas où les sommets étaient beaucoup plus aigus que les creux. De sorte que le grand axe de l'*orbite* était horizontal au lieu d'être vertical dans les régions supérieures, comme M. Aimé et moi nous l'avons trouvé. Quant aux mouvements de recul définitif des corps répandus sur le fond d'un canal et aux autres phénomènes essentiels décrits dans ce Mémoire, notamment sur la génération des *ondes solitaires*, il n'en est pas question. J'ai remarqué d'ailleurs, dans l'analyse de M. Airy, des faits qui viennent à l'appui de mes idées sur les points de ressemblance entre les deux espèces d'ondes.

THÉORÈME
SUR LES ARCS DES LIGNES APLANÉTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Les arcs des ovales de Descartes, ou, comme on a coutume de dire aujourd'hui, des lignes *aplanétiques*, quoique dépendant, en général, d'une transcendante fort compliquée, jouissent d'une propriété assez simple qui n'a pas encore, je crois, été remarquée.

On doit se rappeler que la courbe complète se compose de deux ovales conjugués [*]. Maintenant voici la propriété que je veux établir :

« Soient P_1, P_2 deux points qu'un rayon vecteur, issu d'un foyer, » détermine sur la courbe; soient aussi P'_1, P'_2 deux points qu'un » second rayon vecteur, tiré du même foyer, détermine d'une ma- » nière semblable. La différence des deux arcs $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ sera » égale à un arc d'ellipse. »

Pour le faire voir, nous chercherons d'abord une formule pour la rectification des courbes comprises dans l'équation générale

$$(1) \qquad r^2 - 2r\Omega + \alpha = 0,$$

dans laquelle Ω désigne une fonction quelconque de l'angle polaire ω, et α une quantité constante. On trouvera facilement que si s_1, s_2 sont les arcs qui répondent à la même valeur de ω, on aura, en

[*] *Voir* un article de M. Quételet, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles*, tome V, et l'*Aperçu historique* de M. Chasles, page 350, note XXI.

faisant $d\Omega = \Omega' d\omega$,

$$s_1 + s_2 = 2\int \sqrt{\frac{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}{\Omega^2 - \alpha}}\,\Omega\, d\omega,$$

$$s_1 - s_2 = 2\int \sqrt{\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha}\, d\omega.$$

Cela posé, considérons une ligne aplanétique. Sa propriété fondamentale s'exprime par la formule

$$r + mr' = n,$$

où r, r' sont les rayons vecteurs tirés de deux points fixes à un point quelconque sur la courbe, et m, n sont des constantes. En désignant par ω l'angle que fait le rayon r avec la droite (c) qui joint les deux points fixes, on trouvera, pour l'équation polaire de la courbe,

$$r^2 - 2r\left(\frac{n - m^2 c\cos\omega}{1 - m^2}\right) + \frac{n^2 - m^2 c^2}{1 - m^2} = 0.$$

Cette équation s'identifie avec l'équation (1) en faisant

$$\Omega = \frac{n - m^2 c\cos\omega}{1 - m^2}, \quad \alpha = \frac{n^2 - m^2 c^2}{1 - m^2},$$

ce qui donne

$$\Omega^2 + \Omega'^2 - \alpha = \frac{m^2(n^2 - 2nc\cos\omega + c^2)}{(1 - m^2)^2};$$

et, par conséquent, il vient, en prenant ω entre deux limites quelconques ω_0 et ω_1,

$$s_1 - s_2 = \frac{2m}{1 - m^2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{n^2 - 2nc\cos\omega + c^2}\, d\omega.$$

Mais l'intégrale

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{n^2 - 2nc\cos\omega + c^2}\, d\omega$$

est un arc d'ellipse, ayant pour grand axe $2(n + c)$, et pour excentricité $\frac{2\sqrt{nc}}{n + c}$; ce qui démontre le théorème que nous nous avions énoncé plus haut.

La méthode des coordonnées elliptiques fournit très-simplement la valeur générale de l'arc, sous la forme d'une fonction ultra-elliptique. En nommant $2b$ la distance donnée des foyers dans ce système des coordonnées, on sait que pour l'élément ds d'un arc de courbe quelconque, la formule suivante a lieu :

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

Mais l'équation d'une aplanétique, entre les coordonnées μ et ν, est évidemment du premier degré, en sorte qu'on a, p et q étant des constantes,

$$\mu + p\nu = q;$$

de là on déduit, pour la rectification de cette courbe,

$$ds = d\nu \sqrt{\frac{[q^2 - 2pq\nu + (p^2 - 1)\nu^2][(p^2 - 1)b^2 + q^2 - 2pq\nu]}{(b^2 - \nu^2)(q^2 - b^2 - 2pq\nu + p^2\nu^2)}},$$

expression dans laquelle la quantité soumise au signe radical monte jusqu'au septième degré, lorsqu'on la ramène à la forme ordinaire.

Dublin, le 10 avril 1850.

NOTE

SUR LA

THÉORIE DES TUYAUX D'ORGUES,

DITS TUYAUX A CHEMINÉE;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

1. Daniel Bernoulli a donné le premier une théorie mathématique du mouvement de l'air dans les tuyaux à cheminée, c'est-à-dire dans les tuyaux composés de deux parties de grosseur différente. Cette théorie est inexacte; elle est fondée sur une supposition dont il est facile de démontrer la fausseté : mais il est à remarquer que l'erreur n'affecte pas les résultats les plus importants, ceux qui se rapportent aux sons que le tuyau peut faire entendre. Je me propose ici de rectifier cette théorie, et d'expliquer par quelle compensation d'erreurs la supposition fausse de ce grand physicien ne l'a pas empêché d'obtenir les mêmes sons auxquels on est conduit par une analyse exacte.

Soit AB un tuyau cylindrique, bouché en A, suivi d'un tuyau cylindrique BC, ouvert en C et en B. Soient ω, ω' les aires des bases de ces deux cylindres; l, l' leurs longueurs. Il s'agit de déterminer les mouvements périodiques simples, très-petits, que peuvent prendre toutes les tranches du gaz. Par *mouvement simple*, nous entendons un mouvement où les déplacements de tous les points varient en conservant toujours les mêmes rapports, et, par conséquent, où le déplacement est exprimable par le produit d'une même fonction du

temps par un coefficient, différent d'un point à l'autre : de sorte que, pour l'ensemble des points, le déplacement est le produit d'une fonction du temps t par une fonction de l'abscisse x.

D'après la théorie du mouvement longitudinal d'un gaz dans un tuyau cylindrique, on sait que le déplacement u d'une tranche est assujetti à l'équation aux différentielles partielles,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{1}$$

a étant une constante dépendante du gaz dont il s'agit; et que, par conséquent, dans une portion cylindrique de gaz, tout mouvement périodique simple ne peut donner, pour u, qu'une expression de la forme

$$u = A \sin(mx + \alpha) \sin(amt + 6). \tag{2}$$

Cette forme conviendra exclusivement à toute portion cylindrique d'une masse quelconque de gaz, animée d'un mouvement simple, soit que cette portion soit isolée, au moyen de cloisons fixes à ses deux extrémités, soit qu'elle communique à d'autres portions de gaz. Elle résulte de la simple supposition que le gaz situé dans la partie cylindrique ne puisse s'y déplacer que de quantités infiniment petites, et soit animé d'un mouvement périodique simple.

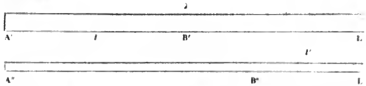
Nous admettons ici que tous les points du gaz se meuvent par tranches parallèlement aux génératrices du tuyau; ce qui ne peut être entièrement exact à cause du changement de diamètre qui doit apporter un trouble, non calculable, aux environs de la jonction : nous sommes obligé, comme D. Bernoulli, de négliger cette cause d'erreur, dont l'influence doit être faible dans les mouvements infiniment petits.

La densité ne pouvant varier brusquement d'un point à un autre dans une masse quelconque de gaz, d'une manière permanente (sans quoi une tranche infiniment mince prendrait une vitesse infinie), nous devrons admettre qu'à la section de jonction des deux tuyaux la densité soit la même dans l'un et dans l'autre, et, par suite, la force élastique. De plus, pour qu'il n'y ait ni discontinuité ni pénétration dans le gaz, il faut que les vitesses des tranches infiniment voisines de

cette section soient en raison inverse des aires des bases des deux tubes.

Enfin, nous supposerons que, si l'une des deux extrémités est en communication avec une masse indéfinie de gaz, la force élastique y soit la même dans ce tuyau que dans ce gaz, et, par conséquent, invariable; et que, si le tuyau est fermé à une de ses extrémités, la tranche de gaz qui y est contiguë soit constamment immobile.

Quand les mouvements simples seront déterminés, rien ne sera plus facile que d'exprimer par leur moyen les mouvements les plus composés.



2. Nous allons chercher à ramener le mouvement dans le tuyau composé au mouvement dans des tuyaux uniformes, c'est-à-dire dont la section soit partout la même.

Admettons donc que le tuyau composé soit animé d'un mouvement simple; nous remarquerons d'abord que, dans toute l'étendue de la portion AB, le déplacement relatif à un mouvement simple quelconque sera représenté par une expression de la forme (2), et que, par conséquent, il existe un tuyau uniforme A'L, fermé en A', ouvert en L, d'une certaine longueur λ, et qui sera susceptible d'avoir un mouvement qui coïncide dans une longueur $A'B' = l$ avec celui de AB.

Il existera de même un tuyau uniforme A"L, dont le mouvement, dans une longueur $LB'' = l'$ prise à partir de l'extrémité ouverte L, sera le même que celui qui a lieu dans la partie BC. Ce second tuyau devra avoir la même longueur λ que le premier, afin qu'il puisse avoir les mouvements simples de même durée, comme cela doit être, puisqu'il en est ainsi, par hypothèse, dans AB et BC.

Mais il n'est nullement démontré que le mouvement doive être identiquement le même dans ces deux tuyaux de longueur λ; il en est

même tout autrement; et c'est précisément l'erreur que Bernoulli a commise en admettant qu'un seul tuyau, d'une longueur convenable, pouvait, dans des longueurs l, l' prises respectivement à partir de ses deux extrémités, présenter les mouvements qui ont lieu dans les deux parties du tuyau proposé.

Désignons par v, v' les déplacements des tranches dans ces deux tuyaux, on aura d'abord les deux équations indéfinies,

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2\frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{d^2v'}{dt^2} = a^2\frac{d^2v'}{dx^2}.$$

Un mouvement simple quelconque du premier sera représenté par une équation semblable à l'équation (2), et l'on aura

$$v = \text{M}\sin(nx + \alpha)\sin(ant + 6),$$

ou seulement, en observant que l'on doit avoir $v = 0$ pour $x = 0$,

(3) $$v = \text{M}\sin nx \sin(ant + 6).$$

La valeur de v' sera de même forme, et le facteur fonction de t devra être identique à celui de v, d'après ce qui a été dit précédemment; on devra donc avoir nécessairement

(4) $$v' = \text{M}'\sin nx \sin(ant + 6).$$

Il faut maintenant assujettir ces valeurs de v, v' aux conditions particulières que nous avons indiquées.

A l'extrémité L, on doit avoir

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv'}{dx} = 0,$$

ce qui exige

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad n\lambda = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

k pouvant être un nombre entier quelconque. Mais, comme il suffit de prendre la plus petite longueur pour le tuyau simple, on prendra $k = 0$ et

(5) $$n\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, la densité en B′ devant être la même qu'en B″, on aura

$$(6) \qquad M \cos nl = M' \cos n(\lambda - l') = M' \sin nl'.$$

Enfin, les vitesses en B′ et B″ devant être en raison inverse des sections ω, ω', on aura cette dernière condition

$$(7) \qquad M\omega \sin nl = M'\omega' \sin n(\lambda - l') = M'\omega' \cos nl'.$$

Divisons les deux membres de l'équation (7) par ceux de l'équation (6), ce qui peut se faire, à moins que ces derniers ne soient nuls; nous aurons

$$(8) \qquad \omega \operatorname{tang} nl = \omega' \cot nl' \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} nl \operatorname{tang} nl' = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Si l'on introduisait λ au lieu de n, cette équation deviendrait

$$\operatorname{tang} \frac{\pi l}{2\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi l'}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Quant au cas où l'on satisferait à l'équation (6) en annulant ses deux membres, c'est-à-dire en posant

$$\cos nl = 0, \quad \sin nl' = 0,$$

on pourra, par extension, le regarder comme renfermé dans l'équation (8), où l'on admettrait la solution

$$\operatorname{tang} nl = \infty, \quad \cot nl' = \infty.$$

De cette manière, les équations (7) et (8) peuvent remplacer complétement les équations (6) et (7).

L'équation (8) détermine pour n une infinité de valeurs, a chacune desquelles correspond une période θ pour les mouvements de chaque tranche, et, par suite, un son déterminé La valeur de cette période est

$$\theta = \frac{2\pi}{an}.$$

La valeur correspondante du tuyau simple consonnant avec le tuyau composé est

$$\lambda = \frac{a\theta}{4},$$

et le rapport $\frac{M}{M'}$ a pour valeur

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sin nl'}{\cos nl}.$$

5. Nous concluons de tout ce qui précède que, si le tuyau proposé AC est susceptible d'un mouvement simple, le gaz contenu dans la partie AB aura le même mouvement que celui qui sera contenu dans la partie $A'B' = l$ du tuyau uniforme $A'L$ ayant pour longueur λ et pour section ω, et que le gaz contenu dans BC aura le même mouvement que celui de la partie $B''L = l'$ du tuyau uniforme $A''L$ qui a pour longueur λ et pour section ω'.

Mais, comme on ne peut admettre, à priori, que le tuyau proposé soit susceptible d'un mouvement simple, il n'y a jusqu'ici qu'une solution hypothétique; et il reste à démontrer que les divers mouvements auxquels nous venons de parvenir peuvent, en effet, exister dans ce tuyau : ce qui nous donnera la solution complète du problème des mouvements simples.

Remarquons d'abord que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, une tranche de gaz se trouve dans les mêmes conditions si on lui offre un même volume où elle puisse se répandre, quelle que soit la section qu'on lui donne, pourvu que le gaz qui la suit immédiatement soit de même densité dans tous les cas. Or, si l'on considère simultanément les mouvements des tranches en B', B'', les volumes qu'elles traversent en un même temps dans les deux tuyaux sont égaux, et leurs densités sont toujours égales, d'après les équations (6) et (7). D'où il suit que le mouvement de B' ne serait nullement altéré si l'on arrêtait le tuyau $A'L$ en B' et qu'on le fît suivre de la partie $B''L$ du tuyau $A''L$, à la condition que le mouvement y aurait lieu comme il avait effectivement lieu dans $A''L$. Et de même, si l'on coupait le tuyau $A''L$ en B'' et qu'on substituât à la partie $A''B''$ le tuyau $A'B'$, à la condition que le mouvement y resterait ce qu'il était dans cette partie de $A'L$, le mouvement du gaz situé dans la partie $B''L$ ne serait pas altéré. Donc, si dans le tuyau proposé AL on part d'un état initial formé dans AB et BL des deux états initiaux respectifs qui avaient lieu dans $A'B'$ et $B''L$, le mouvement qu'on observera dans ce tuyau composé sera identique en AB et BL à ce qu'il serait respectivement dans

les deux portions A'B', B''L des deux tuyaux uniformes vibrant isolément.

Il résulte de là que, par le procédé que nous avons suivi, nous sommes parvenu à obtenir un mouvement simple dans AL, et comme nous avons prouvé qu'il ne saurait y en avoir d'autres que ceux que fournit ce procédé, nous avons la solution complète des mouvements simples dans les tuyaux à cheminée.

4. Pour connaître tous ces mouvements simples, il faut déterminer toutes les valeurs de n qui peuvent satisfaire à l'équation (8).

$$\omega \operatorname{tang} nl = \omega' \cot nl'.$$

Soit μ la plus grande commune mesure de l, l', de sorte que l'on ait

$$l = p\mu, \quad l' = p'\mu;$$

l'équation (8) deviendra

$$\omega \operatorname{tang} np\mu = \omega' \cot np'\mu,$$

et, en faisant $n\mu = \mathrm{X}$,

$$\omega \operatorname{tang} p\mathrm{X} = \omega' \cot p'\mathrm{X}.$$

Construisons maintenant les courbes dont les équations sont

$$\mathrm{Y} = \frac{\omega}{\omega'} \operatorname{tang} p\mathrm{X}, \quad \mathrm{Y} = \cot p'\mathrm{X};$$

les abscisses de leurs points de rencontre, qui seront deux à deux égales et de signes contraires, donneront toutes les valeurs de $n\mu$, et, par suite, toutes les valeurs cherchées de n.

Quant aux racines exceptionnelles de l'équation (8), qui rendent $\operatorname{tang} nl$ et $\cos nl'$ infinies, elles rendront $\operatorname{tang} p\mathrm{X}$ et $\cot p'\mathrm{X}$ infinies et correspondront, par conséquent, aux valeurs de X, qui donneront une asymptote commune aux deux courbes, si toutefois il en existe. On peut donc les considérer comme fournies elles-mêmes par l'intersection de ces courbes, pourvu que l'on regarde deux branches de courbe, asymptotes d'une même droite et dans le même sens, comme se rencontrant à l'infini.

Pour qu'il y ait des asymptotes communes aux deux courbes, il

faut que l'on puisse avoir en même temps, k, k' désignant deux nombres entiers,

$$pX = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad p'X = k'\pi,$$

ce qui exige la condition

$$\frac{p}{p'} = \frac{2k+1}{2k'} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{l'} = \frac{2k+1}{2k'}.$$

Il faut donc que les deux longueurs l, l' aient une commune mesure, et qu'elle soit contenue un nombre impair de fois dans l, et pair dans l'. Soient $p = 2q+1$, $p' = 2q'$; toutes les valeurs de k et k' devront satisfaire à l'équation indéterminée

$$\frac{2k+1}{2k'} = \frac{2q+1}{2q'},$$

de sorte que k et k' devront croître de quantités correspondantes qui soient entre elles comme $2q+1$ et $2q'$, et, par conséquent, l'intervalle entre leurs valeurs consécutives sera $2q+1$ pour k et $2q'$ pour k'; on aura donc

$$k' = q' + 2rq', \quad k = q + (2q+1)r.$$

Les valeurs de X sont données par la formule

$$X = (2r+1)\frac{\pi}{2},$$

et les valeurs correspondantes de n par celle-ci,

$$n = \frac{(2r+1)\pi}{2\mu}.$$

Si l'on veut déterminer les racines de l'équation (8) autrement que par des constructions, on pourra poser $\tang X = m$, exprimer $\tang pX$, $\tang p'X$ au moyen de m, d'après les formules relatives aux tangentes des arcs multiples. Il en résultera une équation algébrique en m qui déterminera un nombre fini de racines réelles, à chacune desquelles correspondra une infinité de valeurs équidifférentes de X, et, par suite, de n.

Les valeurs de n étant connues, si l'on en considère une quelconque, on aura, pour un mouvement simple quelconque du tuyau

composé,

$$(9)\qquad \begin{cases} v = \mathrm{M}\sin nx \sin(ant + \beta), \\ v' = \mathrm{M}\dfrac{\cos nl}{\sin nl'}\sin nx \sin(ant + \beta), \end{cases}$$

M et β restant indéterminés.

On pourra ensuite, au moyen de ces mouvements simples, former tous les mouvements qui peuvent avoir lieu dans le tuyau; il suffira de faire la somme des expressions (9) prises pour toutes les valeurs de n en changeant de l'une à l'autre les coefficients M, β, et de déterminer, suivant la méthode ordinaire, ces coefficients de maniere à représenter un état initial arbitraire.

5. On aurait pu procéder d'une autre maniere, en exprimant les conditions particulières à certains points du tuyau composé, sans chercher à ramener son mouvement à celui de deux tuyaux composés. C'est la marche que l'on suit ordinairement dans les questions de ce genre; et il est facile de voir qu'elle conduit aux mêmes calculs.

Soient v, v' les déplacements des tranches de gaz, prises respectivement dans les parties AB, BC du tuyau proposé. On aura d'abord les équations générales

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2\frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{d^2v'}{dt^2} = a^2\frac{d^2v'}{dx^2},$$

et les conditions particulières suivantes :

$$\begin{cases} x = 0; \\ v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l + l', \\ \dfrac{dv'}{dx} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l; \\ \omega v = \omega' v'; \\ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv'}{dx}. \end{cases}$$

On satisfera aux équations générales et aux deux premières équations particulières en prenant

$$v = \mathrm{M}\sin nx \sin(ant + \beta),$$
$$v' = \mathrm{M}'\cos n(l + l' - x)\sin(ant + \beta).$$

Les deux dernières conditions donnent

$$\mathrm{M}\cos nl = \mathrm{M}'\sin nl', \quad \mathrm{M}\omega\sin nl = \mathrm{M}'\omega'\cos nl'.$$

Éliminant entre elles $\frac{M}{M'}$, on obtient l'équation

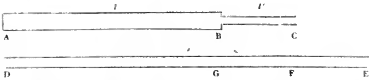
$$\operatorname{tang} nl \operatorname{tang} nl' = \frac{\omega'}{\omega},$$

qui coïncide avec l'équation (8). On trouvera donc pour v les mêmes valeurs que par la méthode précédente, et, par conséquent, on aura, non-seulement les mêmes sons, mais encore les mêmes mouvements pour les tranches de gaz de la partie AB.

Il semble au premier abord que, dans la partie BC, le mouvement n'est pas le même que dans le cas précédent, parce que la valeur de v' n'est pas la même. Mais il faut bien remarquer que x désigne ici la distance d'un point de BC au point A, et que, dans le calcul précédent, x désignait la distance d'un point de BC à l'extrémité fermée du tuyau de longueur $\lambda = \frac{\pi}{2n}$. Il faudrait donc, pour établir l'identité des deux expressions, remplacer dans notre dernière valeur de v', x par $(x + l + l' - \lambda)$. Elle devient alors, en effet,

$$v' = M \frac{\cos nl}{\sin nl'} \sin nx \sin (ant + 6).$$

6. Examinons maintenant la marche suivie par Daniel Bernoulli.



Soit de même ABC un tuyau fermé en A, ouvert en C, ayant pour section ω dans une étendue $AB = l$, et pour section ω' dans l'étendue $BC = l'$. Les conditions qu'il s'impose en B font encore que la densité soit la même dans les deux parties du tuyau, et que les vitesses y soient en raison inverse des sections.

Il admet d'abord, par des considérations très-sommaires, qu'il existe un tuyau simple DE, d'une certaine longueur inconnue λ, non-seulement qui puisse rendre le même son, mais encore tel, que le mouvement y soit identique à celui de AB, dans une étendue DG,

prise égale à AB à partir de l'extrémité bouchée D, et que le mouvement y soit identique à celui de BC dans une étendue FE prise égale à BC à partir de l'extrémité ouverte E. En conséquence, il admet que dans le tuyau DE les densités aux points G, F seront égales entre elles, et les vitesses dans le rapport de ω à ω'.

Cela posé, il considère à une époque quelconque l'excursion c de la tranche en C; ce sera aussi à la même époque l'excursion de la tranche E du tuyau DE. Il en déduit, par la loi connue dans les tuyaux uniformes, l'excursion de la couche en F, qui sera la même que celle de la tranche B dans le tuyau CB. En la multipliant par le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, il en déduit celle de la tranche en B dans le tuyau AB, qui doit être la même que celle de la tranche en G dans le tuyau DE. Mais, d'après les lois des tuyaux uniformes, l'excursion ainsi calculée pour la tranche en G ne correspond plus à une excursion égale à c au point E. Et comme cette dernière ne peut avoir deux valeurs différentes au même instant, on trouverait, en les égalant, une premiere condition qui déterminerait λ, et qui serait

$$\sin\frac{\pi l}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}\cos\frac{\pi l'}{2\lambda}.$$

Cependant Bernoulli ne la pose pas parce qu'il ne pourrait plus disposer de λ de manière à satisfaire à la condition nécessaire de l'égalité des densités en F et G. Il se borne à dire que, relativement au mouvement dans la partie DG, l'excursion en E doit avoir une valeur différente de celle qu'on y avait supposée d'abord. Sans être arrêté par cette contradiction, il cherche la densité en G d'apres cette seconde valeur de l'excursion en E, et calcule la densité en F d'apres la première valeur c de l'excursion en E. Il égale ces deux densités et trouve l'équation suivante, qui ne diffère pas de la nôtre,

$$\tang\frac{\pi l}{2\lambda}\tang\frac{\pi l'}{2\lambda} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

7. Il est facile maintenant d'apercevoir comment ses erreurs se sont compensées, et l'ont conduit à une équation juste pour la détermination de λ, et, par suite, des sons que peut rendre le tuyau composé.

Sa première erreur a été de croire qu'un tuyau simple pouvait avoir dans deux de ses parties les mêmes mouvements qui ont lieu dans les deux parties du tuyau composé. Nous venons de voir que cela était impossible, parce que la longueur du tuyau simple serait déterminée sans que la dernière condition fût satisfaite. Sa seconde erreur a consisté dans la détermination de la densité en G, d'après une fausse valeur de l'excursion de la tranche en E; mais comme cette valeur, impossible dans le tuyau unique DE, est calculée précisément comme le serait celle d'un second tuyau, choisi comme nous l'avons fait dans notre première solution, il s'est trouvé naturellement conduit à la même équation que nous.

C'est ainsi que ses deux erreurs se sont compensées dans la recherche de l'équation qui détermine λ, et, par suite, le son du tuyau. Le reste de sa solution ne serait pas exact, puisque le mouvement des deux parties de AC ne peut coïncider avec celui des deux parties DG, FE. Mais comme il n'a pu faire d'expériences que sur les sons, et qu'il a dû les trouver d'accord avec les longueurs de λ qu'il tirait de son équation, il aura été confirmé par là dans l'opinion que sa théorie était exacte.

On peut conjecturer, d'après la marche de ses idées, que s'il avait reconnu sa théorie défectueuse, il aurait aperçu facilement que le seul moyen de faire disparaître les contradictions était de considérer deux tuyaux simples, et qu'il aurait obtenu précisément celle que nous avons établie en commençant.

Bernoulli traite ensuite un second cas qui se présente plus ordinairement dans la pratique; c'est celui des tuyaux à cheminée, ouverts des deux côtés. Ses hypothèses et ses erreurs sont les mêmes que dans le premier cas, et l'équation dont dépend l'évaluation des sons est encore inexacte. L'explication de ces diverses circonstances ne différant en rien de celle que nous venons de donner, nous laisserons de côté ces détails qui n'offriraient aucun intérêt nouveau.

SUR

QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

I.

Tous les géomètres connaissent la courbe enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres d'une ellipse [*]. L'arc de cette courbe (M. Talbot l'a montré le premier) s'exprime par une fonction elliptique de première espèce avec l'addition d'une partie algébrique, et le périmètre entier est donné exactement par la fonction complète. Dans un Mémoire qui fait partie du tome X de ce Journal, page 177, j'ai considéré la courbe qui dérive de celle de M. Talbot d'après la même construction que cette dernière dérive de l'ellipse, et encore la série de celles qui se déduisent les unes des autres en continuant le même mode de génération. Il résulte d'une formule que j'ai obtenue, que la rectification d'une quelconque des courbes de cette série dépend de fonctions elliptiques des deux premières espèces, ayant toutes le même module, savoir l'excentricité de l'ellipse primitive; l'expression pour un arc indéfini contient toujours, bien entendu, une quantité algébrique, qui s'anéantit lorsqu'on prend la valeur du périmètre entier.

Je vais démontrer, dans cette Note, une propriété assez curieuse des périmètres de la courbe de M. Talbot, et de celle qui la suit immédiatement dans la série dont il s'agit.

[*] On doit à M. Tortolini d'avoir trouvé l'équation de cette courbe, qu'il a présentée sous une forme très-symétrique. (Journal de M. Crelle, tome XXXIII, page 93.)

II.

Soient deux ellipses ayant le même grand axe et dont les excentricités b et c sont complémentaires, en sorte que

$$b^2 + c^2 = 1.$$

Conservons la notation de notre Mémoire, et désignons par S_{-1}, S_{-2} les longueurs des quadrants des deux premières dérivées de l'ellipse à l'excentricité c; et soient Σ_{-1}, Σ_{-2} les mêmes choses par rapport à l'autre ellipse à l'excentricité b. En prenant pour unité le demi-grand axe commun des ellipses, voici la formule qui contient l'énoncé de notre théorème,

$$\frac{1}{b} S_{-1} \Sigma_{-2} + \frac{1}{c} \Sigma_{-1} S_{-2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Pour la démontrer, reportons-nous au tome X de ce Journal, page 183; on y trouvera pour S_{-1}, S_{-2} les valeurs suivantes, exprimées en fonctions elliptiques complètes,

$$S_{-1} = b\,F(c), \quad S_{-2} = 3\,E(c) - (1 + b^2)\,F(c).$$

Il est évident qu'on obtiendra les valeurs de Σ_{-1}, Σ_{-2} en permutant b et c dans les formules précédentes, en sorte qu'on aura

$$\Sigma_{-1} = c\,F(b), \quad \Sigma_{-2} = 3\,E(b) - (1 + c^2)\,F(b),$$

d'où il suit sans peine que

$$\frac{1}{b} S_{-1} \Sigma_{-2} + \frac{1}{c} \Sigma_{-1} S_{-2} = 3\,[F(c)\,E(b) + F(b)\,E(c) - F(b)\,F(c)] = \frac{3\pi}{2},$$

en vertu de la relation bien connue de Legendre entre les fonctions complètes de modules complémentaires.

III.

On aurait pu arriver au résultat que je viens de donner, sans recourir à la théorie des fonctions elliptiques, en employant quelques transformations simples, et en se servant d'une intégrale double remarquable, évaluée par MM. Lamé et Chasles.

On peut obtenir, sans la moindre difficulté, les expressions suivantes pour S_{-1}, S_{-2}, à l'aide des formules qui se trouvent dans mon Mémoire,

$$S_{-1} = b\int_b^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}}, \quad S_{-2} = \int_0^1 \frac{(1+c^2-3c^2\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}}.$$

Pour nous conformer à la notation usitée, remplaçons r par μ dans la première de ces formules, et faisons dans la seconde

$$c\rho = \sqrt{1-\mu^2},$$

ce qui nous donnera

$$(1) \qquad S_{-1} = b\int_b^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)}}, \quad S_{-2} = \int_b^1 \frac{(3\mu^2-1-b^2)\,d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)}}.$$

Il est clair aussi qu'on peut écrire la valeur de Σ_{-1} de la manière suivante :

$$(2) \qquad \Sigma_{-1} = c\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\Sigma_{-2} = \int_0^1 \frac{(1+b^2-3b^2\rho^2)\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-b^2\rho^2)}},$$

d'où, en faisant $b\rho = \nu$,

$$(3) \qquad \Sigma_{-2} = \int_0^b \frac{(1+b^2-3\nu^2)\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

En prenant donc les valeurs de S_{-1}, S_{-2}, Σ_{-1}, Σ_{-2}, données par les équations (1), (2) et (3), nous verrons facilement que

$$\frac{1}{b}S_{-1}\Sigma_{-2} + \frac{1}{c}\Sigma_{-1}S_{-2} = 3\int_b^1\int_0^b \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-b^2)(1-\nu^2)(b^2-\nu^2)}} = \frac{3\pi}{2},$$

en vertu de la formule de M. Lamé (tome II de ce Journal, page 167).

IV.

Il est assez remarquable, ce me semble, que le théorème que nous venons d'établir fournisse le moyen d'énoncer très-simplement et

d'une manière purement géométrique, la formule de Legendre sur les transcendantes elliptiques complémentaires, ou, ce qui est la même chose, l'évaluation de l'intégrale double de M. Lamé. En nous rattachant à la considération des courbes supérieures de la série dont il s'agit, nous pourrions arriver à un énoncé géométrique d'un théorème plus général, donné par ce dernier géomètre dans le tome IV de ce Journal, page 162. La méthode serait tout à fait analogue à celle que j'ai suivie dans ma démonstration de deux théorèmes généraux sur les périmètres de quelques courbes dérivées des hyperboles conjuguées [*] (tome XIII de ce Journal, page 179). Je ferai observer ici qu'on peut donner aux résultats qui s'y trouvent une forme absolument géométrique en substituant aux fonctions elliptiques deux arcs, l'un d'ellipse et l'autre d'hyperbole. Les théorèmes qu'on obtient ainsi sont l'expression des formules à l'aide desquelles Legendre effectue la réduction des fonctions complètes de troisième espèce à celles des deux premières espèces, en supposant toutefois qu'il existe une relation particulière entre le paramètre et le module. Il reste encore à trouver un énoncé géométrique des formules de Legendre dont il s'agit, dans toute leur généralité, sans aucune restriction.

V.

Il me semble que cette idée de rechercher des propriétés géométriques, qui sont les véritables traductions des formules d'analyse, est très-intéressante, et qu'elle n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle le mérite. La formule fondamentale de mon Mémoire (tome X, page 178) offre un exemple très-simple de ce genre. En supposant qu'on prend pour courbe primitive un cercle rapporté à un point intérieur différent du centre, on sait que la première courbe donnée du système négatif sera une ellipse; et si l'on procède à la rectifier à l'aide de ma formule (A), en faisant

$$n = -1,$$

[*] Je prends cette occasion de remarquer que n peut s'évanouir dans S_n ou Σ_n, dans ces deux théorèmes; S_0 (ou Σ_0) exprimera la différence entre l'arc hyperbolique infini et son asymptote.

on trouvera, pour un arc d'ellipse, une expression qui peut s'écrire ainsi :

$$\alpha F(k, \varphi) + \beta E(k, \varphi) + \gamma,$$

α, β, γ étant des quantités algébriques. Cette expression n'est autre chose que celle que fournit la transformation modulaire de Lagrange. Elle se présente naturellement, comme on le voit, si l'on regarde une ellipse comme enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs d'un cercle excentrique; on doit remarquer, en outre, qu'elle comporte le théorème célèbre de Landen [*].

Cela m'a suggéré la question suivante, que je me suis posée il y a déjà longtemps. On sait que les transformations modulaires d'Abel et de M. Jacobi donnent pour une fonction elliptique de seconde espèce, $E(k, \varphi)$, une valeur qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$E(k, \varphi) = \alpha F(h, \psi) + \beta E(h, \psi) + \gamma,$$

α, β, γ étant des quantités algébriques. Quelle est donc la méthode de description d'une ellipse propre à donner le second membre de cette équation comme l'expression directe de son arc? Toutes mes tentatives à résoudre cette question sont restées jusqu'ici sans succès. Espérons que les géomètres ne la regarderont pas comme indigne de leurs talents. Si je ne me trompe, une telle recherche nous conduirait à la découverte d'une foule de propriétés fort curieuses des sections coniques.

VI.

Je terminerai cette Note en mentionnant qu'on peut exprimer géométriquement la propriété bien connue des intégrales définies, savoir :

$$\int_0^1 \frac{z^p\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}} \cdot \int_0^1 \frac{z^{p+m}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}} = \frac{1}{m(p+1)}\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

(Lacroix, *Traité,* tome III, page 413). Cela s'effectue au moyen de quelques courbes remarquables qui ont attiré l'attention des géo-

[*] La démonstration géométrique du théorème de Landen, par feu Mac Cullagh, repose sur cette propriété de l'ellipse.

mètres dans ces derniers temps. J'ai fait observer (tome XII de ce Journal, page 448) que si l'on prend le lieu des projections orthogonales de l'origine sur les tangentes à la courbe

$$r^m \cos m\omega = 1,$$

et si l'on fait dériver de la nouvelle courbe une série d'autres se succédant d'après la même loi, l'équation de la $n^{\text{ième}}$ sera

$$r^{\frac{m}{mn-1}} = \cos\left(\frac{m\omega}{mn-1}\right).$$

Cette courbe se compose d'un certain nombre de boucles fermées égales entre elles, et si l'on désigne par S_n le demi-périmètre d'une quelconque de ces boucles, on aura

$$S_n = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^{\frac{2m}{mn-1}}}},$$

et si l'on fait $r = z^{mn-1}$,

$$S_n = (mn-1)\int_0^1 \frac{z^{mn-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}}.$$

Semblablement, on trouvera, pour la $(n+1)^{\text{ième}}$ courbe,

$$S_{n+1} = (mn+m-1)\int_0^1 \frac{z^{mn+m-2}\,dz}{\sqrt{1-z^{2m}}},$$

d'où l'on déduit sans peine, en ayant égard à la relation (4),

$$(5) \qquad S_n S_{n+1} = \frac{mn+m-1}{m}\,\frac{\pi}{2},$$

théorème qu'on peut regarder comme un énoncé géométrique de la formule d'analyse (4).

En se rappelant que les périmètres de toutes les courbes dérivées de même ordre, pair ou impair, ne diffèrent que par un coefficient numérique, il est évident qu'on obtiendra un résultat analogue à l'équation (5) en multipliant le périmètre d'une dérivée quelconque d'ordre pair par celui d'un autre d'ordre impair.

Dublin, le 28 octobre 1849.

Suite du Mémoire sur les applications du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ [*];

Par M. V.-A. LEBESGUE,

Membre correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

V.

Sommes alternées des racines primitives de quelques équations binômes.

Les racines primitives de l'équation binôme $x^p = 1$ sont celles x qui jouissent de cette propriété que $x^m = 1$ ne peut être satisfaite par $m < p$. Cela arrive toujours en posant

$$x = \cos\frac{2\pi}{p} + \sin\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}.$$

C'est cette valeur qu'il faudra supposer à x dans les formules qui suivront.

On reconnait facilement que si n est premier à p, x^n sera une racine primitive; au contraire, si n n'est pas premier à p, x^n n'est pas racine primitive. Il y a donc $\varphi(p)$ racines primitives, en représentant par $\varphi(p)$ combien il y a de nombres premiers à p et compris de 1 à p.

Pour p premier, les racines primitives, en nombre $p-1$, se distribuent en deux groupes: celles x^n qui donnent $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$, forment le premier groupe; celles x^n qui donnent $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, forment le second. On peut admettre la même classification pour p impair et égal au produit de nombres premiers différents a, b, c,..., c'est-à-dire pour

$$P = abc\ldots.$$

[*] *Voyez* le tome XII de ce Journal, page 497.

Soient donc

$$x^{\mathrm{P}} = 1, \quad \mathrm{P} = abc\ldots,$$

on posera

$$n \equiv \mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{P}}{a}\alpha + \mathrm{B}\cdot\frac{\mathrm{P}}{b}\beta + \ldots \quad (\text{mod. P}),$$

sous les conditions

$\mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{P}}{a} \equiv 1 \quad (\text{mod. } a), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1,$ et autres semblables;

d'où il résulte que n, divisé par $a, b, c, \ldots$, donne les restes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, de sorte que l'on a

$$\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\left(\frac{\gamma}{c}\right)\ldots.$$

De là on voit tout de suite que

$$\sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x^{\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}m\alpha}\sum\left(\frac{\beta}{b}\right)x^{\mathrm{B}\frac{\mathrm{P}}{b}m\beta}\ldots;$$

et comme

$$x = \cos\frac{2\pi}{\mathrm{P}} + \sin\frac{2\pi}{\mathrm{P}}\sqrt{-1}$$

donne

$$x^{\frac{\mathrm{P}}{a}} = \cos\frac{2\pi}{a} + \sin\frac{2\pi}{a}\sqrt{-1} = x_1, \quad \text{d'où} \quad x_1^a = 1,$$

et

$$x^{\frac{\mathrm{P}}{b}} = \cos\frac{2\pi}{b} + \sin\frac{2\pi}{b}\sqrt{-1} = x_2, \quad \text{d'où} \quad x_2^b = 1,$$

et ainsi de suite, on aura

$$\sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_1^{m\mathrm{A}\alpha}\sum\left(\frac{\beta}{b}\right)x_2^{m\mathrm{B}\beta}.$$

Mais, comme l'on a

$$\sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_1^{\alpha} = i^{\frac{a-1}{2}}\sqrt{a}, \quad \sum\left(\frac{\alpha}{a}\right)x_2^{\alpha m\mathrm{A}} = \left(\frac{m\mathrm{A}}{a}\right)i^{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}\sqrt{a},$$

un calcul tout semblable à celui du § IV donnera

$$(a) \qquad \sum\left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right)x^{mn} = \left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)i^{\left(\frac{\mathrm{P}-1}{2}\right)^2}\sqrt{\mathrm{P}}.$$

Il faut remarquer que cette quantité serait nulle si l'on avait m non premier à P, car un des facteurs de la somme serait nul.

Pour l'équation $x^{4P} = 1$, où $P = abc\ldots$ est le produit de nombres premiers différents, les racines primitives sont données par l'expression x^m où m est un nombre impair premier à $4P$ et plus petit. Quant à x, c'est, selon la convention,

$$x = \cos\frac{2\pi}{4P} + \sin\frac{2\pi}{4P}\sqrt{-1}.$$

Si l'on partageait les racines primitives en deux groupes déterminés par les relations

$$\left(\frac{m}{P}\right) = +1 \text{ pour le premier groupe,}$$

$$\left(\frac{m}{P}\right) = -1 \text{ pour le second,}$$

on verrait que, dans la somme

$$\sum\left(\frac{m}{P}\right)x^m,$$

tous les termes où $\left(\frac{m}{P}\right) = +1$ se détruiraient entre eux, parce que, x^m et x^{m+2P} appartenant au même groupe, on aurait, à cause de $x^{2P} = -1$,

$$x^m + x^{m+2P} = 0.$$

Pour déterminer les deux groupes de racines primitives x^m, on prendra donc

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{p}\right) = +1 \text{ pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right) = -1 \text{ pour le second.}$$

On reconnaît alors que x^m et x^{m+2P} appartiennent à des groupes différents, de sorte que les termes d'un même groupe ne se détruisent plus entre eux.

Dans ce cas, on posera

$$n \equiv P\lambda + 4A\frac{P}{a}\alpha + 4B\frac{P}{q}\beta + \ldots \quad (\text{mod. } 4P),$$

sous les conditions

$\lambda = 1, 3,\quad 4P\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a},\quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1,$ et ainsi des autres.

Un calcul tout semblable à celui du premier cas donne

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{mn} = \sum (-1)^{\frac{P\lambda-1}{2}} x^{P\lambda m} \sum \left(\frac{\alpha}{a}\right) x^{4A\frac{P}{a}m\alpha} \ldots;$$

le premier facteur du second membre, en y faisant $\lambda = 1$, $\lambda = 3$, devient

$$(-1)^{\frac{P-1}{2}} \left(\sin m\frac{\pi}{2} - \sin 3m\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{-1} = 2(-1)^{\frac{P-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{-1},$$

et, comme tous les autres facteurs donnent le produit

$$\left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P},$$

en remplaçant $(-1)^{\frac{P-1}{2}} i$ par $i^{2\left(\frac{P-1}{2}\right)+1}$, on aura

$$(b)\qquad \sum (-1)^{\frac{m-1}{2}} x^{mn} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{P}\right) i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2} \sqrt{4P}.$$

Le second membre devient encore nul quand m n'est pas premier à P.

Pour l'équation $x^{8P} = 1$, $P = abc\ldots$, $a, b, c, \ldots$ premiers et différents, les racines primitives x^m ne peuvent être partagées en deux groupes ni au moyen du symbole $\left(\frac{m}{P}\right)$, ni au moyen de celui-ci $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)$, car on verrait dans chaque groupe les termes se détruire deux à deux. On fera

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = 1 \quad \text{pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = -1 \quad \text{pour le second,}$$

ou bien encore

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)=1 \quad \text{pour le premier groupe,}$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right)=-1 \quad \text{pour le second.}$$

Dans ces deux cas, on posera

$$n \equiv \mathrm{P}\lambda + 8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a}\alpha + 8\mathrm{B}\frac{\mathrm{P}}{b}\beta + \ldots \quad (\text{mod. } 8\mathrm{P}),$$

sous les conditions

$\lambda = 1, 3, 5, 7,\quad 8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a} \equiv 1 \ (\text{mod. } a),\quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1,$ et ainsi des autres,

et l'on trouvera, dans les deux cas,

$$\sum (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right) x^{mn}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}} x^{\mathrm{P}\lambda m} \sum \left(\frac{\alpha}{a}\right) x^{8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a} m\alpha} \ldots,$$

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{m}{\mathrm{P}}\right) x^{mn}$$
$$= \sum (-1)^{\frac{\mathrm{P}\lambda-1}{2}+\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}} x^{\mathrm{P}\lambda m} \sum \left(\frac{\alpha}{a}\right) x^{8\mathrm{A}\frac{\mathrm{P}}{a} m\alpha} \ldots;$$

et comme l'on a

$$x = \cos\frac{2\pi}{8\mathrm{P}} + \sin\frac{2\pi}{8\mathrm{P}}\sqrt{-1},$$

d'où

$$x^{\mathrm{P}} = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}.$$

La substitution des valeurs de λ donnera, pour le premier facteur,

$$\sum (-1)^{\frac{(\mathrm{P}\lambda)^2-1}{8}} x^{\mathrm{P}\lambda m}$$
$$= (-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}} \sum (-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}} \left(\cos\frac{\pi}{4}\lambda m + \sin\frac{\pi}{4}\lambda m\sqrt{-1}\right)$$
$$= 2(-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}} \left(\cos m\frac{\pi}{4} - \cos 3m\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 4(-1)^{\frac{\mathrm{P}^2-1}{8}} \sin m\frac{\pi}{2} \sin m\frac{\pi}{4},$$

et de même

$$\sum(-1)^{\frac{P\lambda-1}{2}+\frac{(P\lambda)^2-1}{8}}x^{P\lambda m}$$

$$=(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\left[(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\lambda^2-1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\lambda m+\sin\frac{\pi}{4}\lambda m\sqrt{-1}\right)\right]$$

$$=2(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\left(\sin m\frac{\pi}{4}+\sin 3m\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{-1}$$

$$=4(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P^2-1}{8}}\sin m\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{4}\sqrt{-1};$$

mais

$$\sin m\frac{\pi}{2}=(-1)^{\frac{m-1}{2}},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin m\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos m\frac{\pi}{4}=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'ailleurs le produit des autres facteurs donne, à cause de $8=2.4$ et $\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}$,...,

$$(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{8}\right)^2}\sqrt{P};$$

de là, pour produits définitifs,

$$(c)\qquad \sum(-1)^{\frac{m^2-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right)x^{mn}=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P-1}{8}\right)^2}\sqrt{8P},$$

$$(d)\qquad \sum(-1)^{\frac{m-1}{1}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)x^{mn}=(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right)i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{8P}.$$

Si l'on convient de représenter par p les nombres P, 4P, 8P, 8P, selon les cas et de remplacer les symboles

$$\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right),$$

par le symbole unique $\left[\frac{m}{p}\right]$, suivant les cas, on aura plus simplement

$$(a')\quad\begin{cases}\sum\left[\frac{m}{p}\right]x^{mn}=\left[\frac{m}{p}\right]i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}, & \text{premier et troisième cas,}\\[2ex] \sum\left[\frac{m}{p}\right]x^{mn}=\left[\frac{m}{p}\right]i^{\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}\sqrt{p}, & \text{deuxième et quatrième cas.}\end{cases}$$

Ces sommes sont nulles pour m non premier à P.

Dans ces formules on peut distinguer deux cas, selon que $i = \sqrt{-1}$ reste ou disparaît :

1°. $P = 4Q+1$, $4Q-1$, $4Q+1$, $4Q-1$, i disparaît;

2°. $P = 4Q-1$, $4Q+1$, $4Q-1$, $4Q+1$, i reste à la première puissance.

Or, si l'on appelle A les nombres qui donnent $\left[\frac{A}{p}\right] = 1$ et B ceux qui donnent $\left[\frac{B}{p}\right] = -1$, le premier membre des équations (a') étant

$$\sum \cos A m \frac{2\pi}{p} - \sum \cos B m \frac{2\pi}{p} + \left(\sum \sin A m \frac{2\pi}{p} - \sum \sin B m \frac{2\pi}{p}\right)\sqrt{-1},$$

on aura, pour les cas où i disparaît,

$$(a'') \quad \begin{cases} \sum \cos A m \frac{2\pi}{p} - \sum \cos B m \frac{2\pi}{p} = \left[\frac{m}{p}\right]\sqrt{p}, \\ \sum \sin A m \frac{2\pi}{p} - \sum \sin B m \frac{2\pi}{p} = 0, \end{cases}$$

et, pour les cas où i reste à la première puissance,

$$(b'') \quad \begin{cases} \sum \cos A m \frac{2\pi}{p} - \sum \cos B m \frac{2\pi}{p} = 0, \\ \sum \sin A m \frac{2\pi}{p} - \sum \sin B m \frac{2\pi}{p} = \left[\frac{m}{p}\right]\sqrt{p}. \end{cases}$$

Rien ne serait plus facile que d'obtenir les sommes

$$\sum \cos A m \frac{2\pi}{p}, \quad \sum \cos B m \frac{2\pi}{p}, \quad \sum \sin A m \frac{2\pi}{p}, \quad \sum \sin B m \frac{2\pi}{p},$$

car l'équation connue aux racines primitives a pour coefficient du second terme, pris en signe contraire,

$$\sum \cos A m \frac{2\pi}{p} + \sum \cos B m \frac{2\pi}{p} + \left(\sum \sin A m \frac{2\pi}{p} + \sum \sin B m \frac{2\pi}{p}\right)\sqrt{-1};$$

on a donc toujours

$$\sum \sin A m \frac{2\pi}{p} + \sum \sin B m \frac{2\pi}{p} = 0.$$

Pour les trois derniers cas ($4P$, $8P$), le coefficient du second terme est nul, car, comme on l'a vu, les racines se détruisent deux à deux; on a donc

$$\sum \cos \mathrm{A}m\frac{2\pi}{p} + \sum \cos \mathrm{B}m\frac{2\pi}{p} = 0.$$

Mais, pour le premier cas, ce coefficient, pris en signe contraire, est ± 1, selon que les facteurs a, b, c,... sont en nombre pair ou impair (*voyez* le tome IV des *Anciens Exercices* de M. Cauchy); ainsi

$$\sum \cos \mathrm{A}m\frac{2\pi}{p} + \sum \cos \mathrm{B}m\frac{2\pi}{p} = \pm 1.$$

On a donc tout ce qu'il faut pour obtenir les quatre sommes.

Les formules précédentes se trouvent dans la seconde partie du Mémoire de M. Dirichlet sur les applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres (Journal de M. Crelle, tome XXI). On peut aussi consulter les notes du grand Mémoire de M. Cauchy sur la théorie des nombres, 1830 (*Mémoires de l'Académie*).

VI.

Seconde application. — Des diviseurs de $z^2 - D$.

PROBLÈME. *Trouver les diviseurs de $z^2 - D$?*

La solution est donnée dans les n^os^ 147-150 des *Disq. arith.* En voici le résumé nécessaire pour l'objet principal de cet article. Le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ facilite beaucoup l'exposition.

Il sera seulement question des diviseurs impairs premiers à D dans le cas de D nombre positif ou négatif sans facteur carré. Tous les autres cas s'en déduisent facilement. On supposera

$$\mathrm{D} = (-1)^{\alpha}\, 2^{\beta}\, \mathrm{P}, \quad \mathrm{P} = abc\ldots r,$$

α sera 0 ou 1 selon que D sera positif ou négatif; β sera 0 ou 1 selon que D sera pair ou impair. Quant à P, c'est le produit de nombres

premiers différents $a, b, c, \ldots, r$; il est de forme $4Q+1$ ou $4Q-1$, selon que les nombres premiers $a, b, c, \ldots, r$ de forme $4K-1$ sont en nombre pair ou en nombre impair.

1. Un nombre premier impair n est diviseur de $z^2 - D$ si l'on a

$$\left(\frac{D}{n}\right) = +1,$$

et il ne l'est pas (il est non diviseur) quand on a

$$\left(\frac{D}{n}\right) = -1.$$

Ces conditions expriment, en effet, que D est résidu ou non-résidu quadratique de n.

2. Si l'on pose

$$\delta = (-1)^{\alpha + \frac{P-1}{2}}, \quad \varepsilon = (-1)^{\beta},$$

on aura

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

En effet,

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)^{\alpha} \left(\frac{2}{n}\right)^{\beta} \left(\frac{P}{n}\right),$$

et comme

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

et

$$\left(\frac{P}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{P-1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right),$$

on en tirera

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left[(-1)^{\alpha + \frac{P-1}{2}}\right]^{\frac{n-1}{2}} [(-1)^{\beta}]^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right).$$

3. L'expression $\left(\frac{D}{n}\right)$ a quatre valeurs qui correspondent ainsi qu'il

suit aux diverses formules de $z^2 - D$:

$$\begin{array}{l} D > 0, \\ D < 0, \\ \left(\frac{D}{n}\right), \end{array}
\left\{\begin{array}{ll}
1^{\circ}. \left\{\begin{array}{l} D = P = 4Q+1, \\ D = -P = -(4Q-1), \\ \qquad \left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. &
2^{\circ}. \left\{\begin{array}{l} D = P = 4Q-1, \\ D = -P = -(4Q+1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. \\
3^{\circ}. \left\{\begin{array}{l} D = 2P = 2(4Q+1), \\ D = -2P = -2(4Q-1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right); \end{array}\right. &
4^{\circ}. \left\{\begin{array}{l} D = 2P = 2(4Q-1), \\ D = -2P = -2(4Q+1), \\ \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2^2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right). \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Cela suit de la substitution des valeurs de α et β.

4. Les diviseurs premiers n et les non diviseurs se trouvent par les formules suivantes. Posez

$$1^{\circ}. \quad n \equiv A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + R\frac{P}{r}\rho \quad (\text{mod. } P),$$

$$\left(\frac{n}{P}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$2^{\circ}. \quad n \equiv 4A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 4R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \quad (\text{mod. } 4P),$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$3^{\circ}. \quad n \equiv 8A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 8R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \quad (\text{mod. } 8P),$$

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma^2-1}{8}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right);$$

$$4^{\circ}. \quad n \equiv 8A\frac{P}{a}\alpha + \ldots + 8R\frac{P}{r}\rho + SP\sigma \quad (\text{mod. } 8P),$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\frac{\sigma^2-1}{8}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\left(\frac{\beta}{b}\right)\cdots\left(\frac{\rho}{r}\right),$$

sous les conditions suivantes :

1°. $A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad R\frac{P}{r} \equiv 1 \pmod{r}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a-1, \ldots, \quad \rho = 1, 2, 3, \ldots, r-1;$

2°. $4A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad 4R\frac{P}{r} \equiv 1 \pmod{r}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, a-1, \ldots, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r-1,$

$SP \equiv 1 \pmod{4}, \quad \sigma = 1, 3;$

3° et 4°. $8A\frac{P}{a} \equiv 1 \pmod{a}, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, a-1, \ldots;$

$SP \equiv 1 \pmod{8}, \quad \sigma = 1, 3, 5, 7.$

Il suit de ces formules que n divisé par a donne le reste α; que, divisé par b, il donne le reste β, et ainsi de suite; que, divisé par 4 (deuxième cas), il donne le reste σ; que, divisé par 8 (troisième et quatrième cas), il donne le reste σ. De là la valeur de $\left(\frac{D}{n}\right)$. Si l'on veut donner au symbole $\delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{D}{n}\right)$ la valeur 1, il faudra pour le premier cas que, parmi les facteurs $\left(\frac{\alpha}{a}\right), \left(\frac{\beta}{b}\right), \ldots, \left(\frac{\rho}{r}\right)$, il y ait un nombre pair de facteurs -1; or, pour avoir, par exemple,

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right) = -1,$$

il faut que α soit non-résidu quadratique. Il faudra donc que, parmi $\alpha, \beta, \ldots, \rho$, les non-résidus quadratiques des modules correspondants $a, b, \ldots, r$ soient en nombre pair. Pour le deuxième cas et les suivants, la règle sera la même si les facteurs $(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}, (-1)^{\frac{\sigma^2-1}{8}}, (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\frac{\sigma^2-1}{8}}$ sont égaux à $+1$. Mais si ces facteurs étaient égaux à -1, il faudrait, au contraire, prendre les non-résidus en nombre impair.

Ces formules conduisent à la proposition suivante.

5. Les diviseurs premiers n de $z^2 - D$ sont renfermés dans des formules linéaires qui sont, suivant les cas:

1°. $Px + A$, 2°. $4Px + A$, 3°. $8Px + A$, 4°. $8Px + A$,

les nombres

$A < P$, $A < 4P$, $A < 8P$, $A < 8P$,

étant au nombre de

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{P}),\quad \varphi(\mathrm{P})=\tfrac{1}{4}\varphi(4\mathrm{P}),\quad 2\varphi(\mathrm{P})=\tfrac{1}{2}\varphi(8\mathrm{P}),\quad 2\varphi(\mathrm{P}).$$

De même, les nombres premiers n non diviseurs sont contenus dans des formules linéaires :

$$\begin{array}{llll} 1^{\circ}.\ \mathrm{P}x+\mathrm{B}, & 2^{\circ}.\ 4\mathrm{P}x+\mathrm{B}, & 3^{\circ}.\ 8\mathrm{P}x+\mathrm{B}, & 4^{\circ}.\ 8\mathrm{P}x+\mathrm{B}, \\ \quad \mathrm{B}<\mathrm{P}, & \quad \mathrm{B}<4\mathrm{P}, & \quad \mathrm{B}<8\mathrm{P}, & \quad \mathrm{B}<8\mathrm{P}, \end{array}$$

en nombre

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\mathrm{P}),\qquad \varphi(\mathrm{P}),\qquad 2\varphi(\mathrm{P}),\qquad 2\varphi(\mathrm{P}).$$

Il faut bien remarquer que A est premier à P, ou 4P, ou 8P, selon les cas, et de même pour B; que les nombres A et B forment entre eux tous les nombres premiers à P, 4P, 8P, selon les cas. Quant à $\varphi(\mathrm{P})$, $\varphi(4\mathrm{P})$, $\varphi(8\mathrm{P})$, ils indiquent respectivement combien il y a de nombres premiers à P, 4P et 8P. Comme il est très-facile de voir que les formules $\mathrm{P}x+\mathrm{A}$, $\mathrm{P}x+\mathrm{B}$, etc., sont en même nombre, on en conclut $\frac{1}{2}\varphi(\mathrm{P})$ pour le nombre des formules $\mathrm{P}x+\mathrm{A}$ aussi bien que pour le nombre des formules $\mathrm{P}x+\mathrm{B}$, et de même pour les autres cas.

6. Pour tout nombre composé impair $\mathrm{N}=nn'$, $\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{N}}\right)=\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{n'}\right)\ldots$, ainsi tous les diviseurs composés impairs sont nécessairement contenus dans les formules

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 4\mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{A},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{A},$$

qui contiennent aussi des nombres composés non diviseurs.

Au contraire, tous les nombres composés compris dans les formules

$$(\mathrm{B})\qquad \mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 4\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},\quad 8\mathrm{P}x+\mathrm{B},$$

sont nécessairement non diviseurs.

7. Si les nombres des formules (A) sont dits de première classe et ceux des formules (B) de seconde classe, tout nombre, décomposé en facteurs, sera de première ou de seconde classe selon que le nombre des facteurs de seconde classe sera pair ou impair.

8. Soient

$$a, \quad a', \quad a'', \ldots, \text{ tous les nombres de première classe;}$$
$$b, \quad b', \quad b'', \ldots, \text{ tous ceux de seconde classe;}$$

les produits

$$am, \; a'm, \; a''m, \ldots,$$
$$bm, \; b'm, \; b''m, \ldots,$$

contiendront aussi tous les nombres d'une même classe, savoir, de première classe quand les deux facteurs a, m ou b, m sont de même classe; et de seconde classe quand les facteurs a, m ou b, m sont de classes différentes.

Cette remarque conduit à la formation des sommes alternées pour les racines primitives des équations binômes

$$x^{\mathrm{P}} = 1, \quad x^{4\mathrm{P}} = 1, \quad x^{8\mathrm{P}} = 1,$$

dont il a été question dans le § V.

VII.

De la somme $\mathrm{V} = \sum \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) \frac{1}{n}$.

Cette somme renferme quatre cas. Dans le premier $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, elle s'étend à tous les nombres n pairs ou impairs premiers à P. Dans le deuxième, elle s'étend à tous les nombres impairs premiers à $4\mathrm{P}$; dans les deux derniers, à tous les nombres impairs premiers à $8\mathrm{P}$. Elle n'est autre que

$$\sum \frac{1}{\mathrm{A}} - \sum \frac{1}{\mathrm{B}},$$

en représentant par A tous les nombres de première classe et par B tous les nombres de seconde classe, ces nombres étant calculés par les règles du § VI.

Cette même somme se présente dans la recherche du nombre des formes réduites (quadratiques binaires) avec cette seule différence que, dans le premier cas, la somme $\sum \left(\frac{n}{\mathrm{P}}\right) \frac{1}{n}$ s'étend aux seules va-

29..

leurs impaires de n premières à P. Or, si l'on désigne cette somme ainsi limitée par V', en conservant V pour le cas où la série s'étend aux valeurs paires et impaires de n, comme l'on a

$$\left(\frac{2\nu}{P}\right)\frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{\nu}{P}\right)\frac{1}{\nu},$$

on reconnaît tout de suite que l'on a

$$V = V' + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)V, \quad \text{ou} \quad V' = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P}\right)\right]V;$$

et c'est, en effet, par cette dernière formule que M. Dirichlet calcule V' au moyen de V.

L'expression

$$\sum \frac{1}{A} - \sum \frac{1}{B}$$

est formée de parties telles que

$$\sum \frac{1}{px+a} - \sum \frac{1}{px+b},$$

en mettant, suivant les cas, p pour P, 4P, 8P.

Les parties

$$\sum \frac{1}{px+a}, \quad \sum \frac{1}{px+b},$$

sont l'une et l'autre infinies et sensiblement égales à

$$\frac{1}{p}\sum \frac{1}{x+1}$$

(les sommes sont prises de $x = 0$ à $x = \infty$), mais la différence

$$\sum \frac{1}{px+a} - \sum \frac{1}{px+b}$$

est finie et s'exprime par arcs de cercle et logarithmes, et il n'est pas nécessaire pour cela que a et b soient des nombres de classe différente.

L'identité

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^p} = x^{a-1}\left[1 + x^p + x^{2p} + \ldots + x^{(k-1)p} + \frac{x^{kp}}{1-x^p}\right],$$

donne

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{p+a} + \frac{1}{2p+a} + \ldots + \frac{1}{(k-1)p+a} + \int_0^1 \frac{x^{kp+a-1}\,dx}{1-x^p}.$$

Mais la somme

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{pz+a}$$

est infinie, et l'on ne peut négliger le reste

$$\int_0^1 \frac{x^{kp+a-1}\,dx}{1-x^p}.$$

Il n'en est plus de même quand on considère l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(x^{a-1}-x^{b-1})\,dx}{1-x^p}.$$

On peut sans inconvénient négliger le reste

$$\int_0^1 \frac{x^{kp}(x^{a-1}-x^{b-1})\,dx}{1-x^p},$$

car on a, en supposant $a < b$,

$$\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x^p} = x^{a-1}\frac{1-x^{b-a}}{1-x^p} = x^{a-1}\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{b-a-1}}{1+x+\ldots+x^{p-1}},$$

de sorte que l'intégrale précédente est toujours inférieure à

$$\int_0^1 x^{kp+a-1}\,dx = \frac{1}{kp+a},$$

que le nombre indéterminé k rend aussi petite qu'on voudra.

On voit donc qu'en représentant par $f(x)$ la somme

$$\sum x^{\mathrm{A}} - \sum x^{\mathrm{B}},$$

en mettant pour A tous les nombres de première classe inférieurs à P, 4P ou 8P selon le cas, et de même pour B les nombres de seconde classe inférieurs à P, 4P, 8P, on a

$$\mathrm{V} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x} f(x)\,dx}{1-x^p}.$$

C'est la première des méthodes dues à M. Dirichlet. Il est tout aussi simple de calculer la somme V par parties.

La décomposition en fractions rationnelles donne, comme l'on sait,

$$\frac{x^{a-1}}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p} \frac{\cos am\frac{2\pi}{p}x - \cos(a-1)m\frac{2\pi}{p}}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1},$$

de plus, la fonction sous le signe $\sum$ est égale à

$$\frac{\cos am\frac{2\pi}{p}\left(x - \cos m\frac{2\pi}{p}\right)}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1} - \frac{\sin am\frac{2\pi}{p}\sin m\frac{2\pi}{p}}{x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1};$$

de sorte que l'on a

$$\int_0^x \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = -\frac{1}{2p}\sum_{m=1}^{m=p}\cos am\frac{2\pi}{p}\log\left(x^2 - 2\cos m\frac{2\pi}{p}x + 1\right).$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x\sin m\frac{2\pi}{p}}{1 - x\cos m\frac{2\pi}{p}}\right),$$

et, par conséquent, pour $x = 1$,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\cos am\frac{2\pi}{p}\log 2\sin m\frac{\pi}{p}$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{p}\right).$$

Si, dans la formule identique, par le développement,

(A) $$\cos(2p+1)k = \cos k - 2\sin k\sum_{m=1}^{m=p}\sin 2mk,$$

on pose

$$k = \frac{a\pi}{p},$$

il en résulte

$$\sum_{m=1}^{m=p}\sin am\frac{2\pi}{p} = 0;$$

et de même, la formule

$$(\mathrm{B}) \qquad \sin(2p+1)k = \sin k + 2\sin k \sum_{m=1}^{m=p} \cos 2mk$$

donne pour $k = \frac{a\pi}{p}$,

$$\sum_{m=1}^{m=p} \cos am\frac{2\pi}{p} = 0,$$

ce qui réduit l'intégrale précédente à

$$(\mathrm{C}) \quad \int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x^p} = -\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p} \cos am\frac{2\pi}{p} \log\sin m\frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{p^2}\sum_{m=1}^{m=p} m\sin am\frac{2\pi}{p}.$$

On pourrait encore simplifier cette formule, la différentiation de la formule (b) donnerait

$$(\mathrm{D}) \qquad \sum_{m=1}^{m=p} m\sin am\frac{2\pi}{p} = -\frac{p}{2}\cot a\frac{\pi}{p}.$$

Avant d'appliquer ces formules au calcul de la somme V, il est bon de donner deux formules qui serviront dans la paragraphe suivant.

Si, dans la formule (C), on change p en $p-a$, on aura

$$\cos am\frac{2\pi}{p} = \cos(p-a)m\frac{2\pi}{p},$$

et la soustraction donnera, au moyen de l'équation (D),

$$\sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{pz+a} - \sum_{z=0}^{z=\infty} \frac{1}{pz+p-a} = \frac{\pi}{p}\cot a\frac{\pi}{p}.$$

Si, dans cette formule, on change p en $2p$ et que l'on double les deux membres, puis que de cette équation on retranche la précédente membre à membre, on aura

$$\sum \frac{(-1)^z}{pz+a} + \sum \frac{(-1)^z}{pz+p-a} = \frac{\pi}{p}\,\frac{1}{\sin a\frac{\pi}{p}}.$$

Ces deux formules sont d'Euler (*Intr. in Anal.*, n° 178).

Voici maintenant le calcul de la fonction V.

Premier cas. $D > 0$.

Pour ce cas, a et $p - a$ appartiennent à la même classe,

$$\sin(p-a)m\frac{2\pi}{p} = -\sin am\frac{2\pi}{p};$$

donc, dans la réunion des intégrales (C), les secondes parties se détruisent, et si, dans la sommation des premières parties, on réunit les multiplicateurs relatifs à une même valeur de m, il suffira de remarquer que le cas $D > 0$ dépend des formules (a') du § V pour avoir

$$V = -\frac{1}{\sqrt{p}}\sum\left[\frac{m}{p}\right]\log\sin\frac{m\pi}{P}.$$

Cette formule renferme les quatre de M. Dirichlet, mais il faut mettre pour p, suivant les cas,

$$P,\quad 4P,\quad 8P,\quad 8P,$$

et pour $\left[\frac{m}{p}\right]$,

$$\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right),\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right).$$

Second cas. $D < 0$.

Pour ce cas, a et $p - a$ appartiennent à des classes différentes. Ainsi, dans la réunion des parties qui forment la somme V, les premières parties des intégrales (C) disparaissent; de plus, c'est ici le cas des formules (a'') du § V, de sorte que l'on trouve

$$V = -\frac{\pi}{(\sqrt{p})^3}\sum\left[\frac{m}{p}\right]m,$$

qui contient les quatre formules de M. Dirichlet, en remplaçant p et $\left[\frac{m}{p}\right]$ par leurs valeurs correspondantes aux différents cas.

L'emploi de la formule (D) donnerait

$$V = \frac{\pi}{p}\sum\cot A\frac{\pi}{p}.$$

Le nombre A est de première classe et moindre que P, 4P, 8P, selon les cas.

La comparaison de cette formule, qui peut être nouvelle, avec celle de M. Dirichlet, donne

$$\sum \cot A\frac{\pi}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum\left[\frac{m}{p}\right] m.$$

Un cas très-particulier a été exposé dans le tome VII de ce Journal, page 143, équation (14).

VIII.

La sommation de la série V peut se faire encore par une autre méthode fondée sur la sommation de certaines séries.

Ainsi, pour le cas de $D < 0$, la sommation repose sur une propriété remarquable de la série

$$\sum_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Elle est nulle pour $x = 0$; puis entre 0 et π, elle prend la valeur $\frac{\pi}{4}$.

Elle est nulle de nouveau pour $x = \pi$; puis de π à 2π, elle prend la valeur $-\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite périodiquement.

De cette série on en déduit une autre,

$$\sum_0^\infty (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

De $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$ la valeur est $\frac{\pi}{4}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$ la valeur est nulle.

Entre $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = 3\frac{\pi}{2}$ la valeur est $-\frac{\pi}{4}$, pour $x = 3\frac{\pi}{2}$ la valeur et nulle.

Entre $x = 3\frac{\pi}{2}$ et $x = 2\pi$ la valeur est $\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite périodiquement.

On en déduit encore les deux formules

$$S = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

$$S' = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1},$$

qui prennent les valeurs suivantes :

	S,	S',
De $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{4}$,	0,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;
De $x = \frac{\pi}{4}$ à $x = 3\frac{\pi}{5}$,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,	0;
De $x = 3\frac{\pi}{4}$ à $x = 5\frac{\pi}{4}$,	0,	$-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;
De $x = 5\frac{\pi}{4}$ à $x = 7\frac{\pi}{4}$,	$-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,	0;
De $x = 7\frac{\pi}{4}$ à $x = 8\frac{\pi}{4}$,	0,	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

On pourrait croire, d'après ces énoncés, que les séries précédentes sont des fonctions discontinues, et c'est, ce me semble, l'opinion reçue le plus généralement. La discussion de cette question sera l'objet d'un Mémoire particulier.

Ces propriétés de la fonction

$$\varphi x = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},$$

sont très-faciles à établir.

Comme

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi x \quad \text{et} \quad \varphi(x + \pi) = -\varphi x,$$

il suffit d'examiner les valeurs de $x = 0$ à $x = \pi$. Or, si l'on pose

$$x = \frac{m\pi}{4q},$$

m étant un entier impair moindre que $4q$, la substitution donnera, en

réunissant les termes où les mêmes sinus reparaissent,

$$\varphi(x) = \sin\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+4q-1}\right]$$
$$+ \sin 3\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+4q-3}\right]$$
$$\vdots$$
$$+ \sin(2q-1)\frac{m\pi}{4q}\left[\sum\frac{(-1)^i}{4qi+2q-1} + \sum\frac{(-1)^i}{4qi+2q+1}\right].$$

Or, d'après la formule d'Euler donnée plus haut, on aura

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4q}\left[\frac{\sin 1\frac{m\pi}{4q}}{\sin 1\frac{\pi}{4q}} + \frac{\sin 3\frac{m\pi}{4q}}{\sin 3\frac{\pi}{4q}} + \ldots + \frac{\sin(2q-1)\frac{m\pi}{4q}}{\sin(2q-1)\frac{\pi}{4q}}\right].$$

Pour $m = 1$, on a tout de suite

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4q}\times q = \frac{\pi}{4}.$$

Pour les autres valeurs de m, on trouvera encore $\frac{\pi}{4}$ en raison des deux formules

$$\frac{\sin(2k+1)a}{\sin a} = 1 + 2(\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 2ka),$$

$$\frac{\sin 2ka}{\sin a} = 2\,[\cos a + \cos 3a + \ldots + \cos(2k-1)a].$$

Par la premiere, on développera les termes $\dfrac{\sin i\frac{m\pi}{4q}}{\sin i\frac{\pi}{4q}}$, et par la seconde, on simplifiera le résultat. On pourrait aussi supposer m pair.

La valeur de $\varphi(x)$ ainsi obtenue, le changement de x en $x+\frac{\pi}{2}$ donnera

$$\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \psi(x) = \sum(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

De même, si l'on pose

$$\theta(x) = \sum (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \frac{\sin nx}{n},$$

$$\xi(x) = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \frac{\cos nx}{n} \quad (n \text{ impair}),$$

on trouvera

$$\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\theta(x) + \xi(x)],$$

$$\varphi\left(x + 3\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}[-\theta(x) + \xi(x)],$$

d'où l'on déduira

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \varphi\left(x + 3\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varphi\left(x + 3\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

et, par suite, les valeurs précédentes.

Cela posé, les formules du § V, relatives au cas de $D < 0$, donnent pour valeur de $\left(\frac{n}{P}\right)$ (premier cas),

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \sum \left(\frac{m}{P}\right) \sin n \frac{2m\pi}{P},$$

on aura pour la série V,

$$V = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum \left(\frac{m}{P}\right) \sum \frac{1}{n} \sin n \frac{2m\pi}{P}.$$

Or la valeur de $\sum \frac{\sin nx}{n}$ pour n impair est $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, selon que l'on a

$$m < \frac{P}{2} \quad \text{ou} \quad > \frac{P}{2}.$$

Soient m' et m'' ces valeurs, on aura donc

$$V = \frac{\pi}{4\sqrt{P}}\left[\sum \left(\frac{m'}{P}\right) - \sum \left(\frac{m''}{P}\right)\right];$$

et comme, pour ce cas, $P = 4Q - 1$, $m'' = P - m'$, $\left(\frac{m''}{P}\right) = -\left(\frac{m'}{P}\right)$,

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \sum \left(\frac{m'}{P}\right).$$

On trouverait généralement

$$V = \frac{\pi}{2\sqrt{p}} \sum \left[\frac{m'}{p}\right],$$

en ayant égard aux valeurs de p et $\left[\frac{m'}{p}\right]$.

Le cas de $D > 0$ ne serait pas plus difficile à traiter; il suffirait de partir de la formule

$$\sum \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{1}{2}\log\left(\cot\frac{x}{2}\right).$$

Voyez pour plus de détails les §§ IX et X du Mémoire déjà cité de M. Dirichlet, sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, deuxième partie, Journal de M. Crelle, tome XXI.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE DOUBLE

$$\int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}};$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Cette intégrale mérite d'être remarquée à cause de l'analogie qu'elle offre, en quelque sorte, avec une intégrale bien connue qui a été évaluée par M. Lamé (tome II de ce Journal, page 167). Elle peut s'exprimer assez simplement par des fonctions elliptiques complètes de première espèce, à modules complémentaires, comme je vais le montrer dans ce qui suit.

Pour le faire voir, il suffira de nous rappeler une formule que j'ai déjà donnée, et qui se trouve à la fin d'une Note insérée au tome XII de ce Journal, page 449. La voici :

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ &= \frac{1}{3}\log\left(\frac{4k'^2}{k}\right)\mathrm{KK}' - \frac{1}{6}\pi(\mathrm{K}^2+\mathrm{K}'^2), \end{aligned}\right.$$

où K, K' désignent respectivement les fonctions complètes

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

dans lesquelles les modules k, k' sont complémentaires.

Maintenant, posons

$$k^2 = \frac{b^2}{c^2}, \quad k'^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2},$$

et faisons

$$\mu^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{c^2 - b^2}{c^2}\sin^2\theta}, \quad \nu = b\sin\varphi,$$

ce qui nous donnera

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}} = \frac{c\,d\mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)}},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{c\,d\nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}},$$

en sorte que l'intégrale, premier membre de l'équation (α), se trouvera transformée dans cette autre

$$c^2\int_b^c\int_0^b \frac{\log\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2}\right)d\mu\,d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}},$$

ou bien encore

$$c^2\int_b^c\int_0^b \frac{\log(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}$$

$$-\,c^2\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)}}\cdot\int_0^b\frac{d\nu}{\sqrt{(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

Mais il est évident que

$$\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)}} = \frac{2\log b}{c}\,\mathrm{K}' - \frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1-k'^2\sin^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},$$

et l'on sait (tome XI de ce Journal, page 197) que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1-k'^2\sin^2\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} = \mathrm{K}'\log k$$

ce qui donne

$$\int_b^c \frac{\log\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{K}'\log(bc),$$

en sorte que l'intégrale qui figure dans la formule (α) pourra s'écrire

de la manière suivante :

$$c^2 \int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}} = \mathrm{KK}' \log(bc),$$

d'où, en ayant égard à la formule (α), et en se rappelant que

$$\frac{k'^2}{k} = \frac{c^2 - b^2}{bc},$$

on déduira finalement

$$\int_b^c \int_0^b \frac{\log(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(c^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}$$
$$= \frac{1}{3c^2} \mathrm{KK}' \log\left[4 b^2 c^2 (c^2 - b^2)\right] - \frac{\pi}{6c^2}(\mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'^2).$$

Dublin, le 11 février 1850.

DES COURBES A PLUSIEURS CENTRES,

OU

DE L'IMITATION DES COURBES CONTINUES

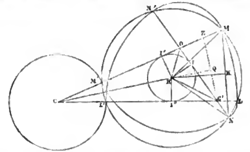
PAR LA RÉUNION DE DIVERS ARCS DE CERCLES;

PAR M. DU HAYS.

Huygens, Camus, Frézier, Perronet, Bossut, Prony, Gauthey, beaucoup d'autres géomètres, et, en dernier lieu, M. Breton, ingénieur des Ponts et Chaussées [*], se sont occupés de l'imitation des courbes continues, par le moyen des courbes à plusieurs centres. aucun ne paraît avoir remarqué le principe sur lequel repose toute la théorie de ce genre de courbes; un exposé sommaire de ce principe ne saurait donc être dépourvu d'utilité.

Toutes les cordes LL', MM', NN', *fig.* 1, comprises entre deux

Fig. 1



cercles concentriques NML' et II'I'', et tangentes au cercle intérieur, sont égales entre elles, et se coupent deux à deux en parties récipro-

[*] *Description des courbes à plusieurs centres*, 1846, in-4°.

quement égales :

$$LC' = NC', \quad L'C' = N'C';$$
$$LC = MC, \quad L'C = M'C;$$
$$MO = N'O, \quad NO = M'O.$$

Il résulte de cette propriété que, si des points C', O, C, comme centres, quels que soient le nombre et la position des cordes, on décrit des arcs de cercles en prenant les différents segments de cordes pour rayons, ces arcs se réuniront sans *jarrets*, et auront leurs points de jonction sur la circonférence NML' du cercle extérieur; cette circonférence sera donc le *lieu géométrique* des points de jonction de tous les systèmes d'arcs qui peuvent être ainsi décrits.

Or deux normales quelconques MO et NO, appartenant à une même courbe, peuvent toujours être considérées comme les segments de deux cordes comprises entre des cercles concentriques, et si l'on veut remplacer l'arc MN de la courbe par deux arcs de cercles qui aient leurs centres sur ces normales, la partie MN de la circonférence extérieure sera le *lieu géométrique* des points de jonction de tous les arcs qui satisferont à la question. Si donc on choisit, sur le cercle extérieur, un point L pour jonction des deux arcs, et qu'on mène de ce point une tangente LI''C au cercle intérieur, cette tangente déterminera, par son intersection avec les normales, les centres C et C' des arcs de cercles cherchés dont les rayons seront

$$MC = LC \quad \text{et} \quad NC' = LC' \text{ [*]}.$$

On obtiendra le centre H des cercles concentriques, soit en complétant les cordes MM' et NN' de manière que

$$ON' = OM \quad \text{et} \quad OM' = ON,$$

et élevant, sur le milieu de ces cordes, les perpendiculaires IH et I'H;

[*] Connaissant l'un de ces rayons, NC' par exemple, si l'on fait MZ = NC', et qu'on élève la perpendiculaire QC sur le milieu de C'Z, son intersection, avec la normale MO prolongée, déterminera immédiatement le second centre C; mais cette méthode, quelque générale qu'elle soit, n'a pas l'avantage de montrer, comme les cercles concentriques, toutes les solutions dont la question est susceptible.

soit en retranchant MO de NO, et élevant les mêmes perpendiculaires; soit enfin en divisant l'angle NOM' en deux parties égales par la droite HO, et élevant la perpendiculaire KH sur le milieu de la corde MN. Ces quatre droites se couperont au même point H, et IH = I'H et MH = NH seront les rayons des seuls cercles concentriques qui conviennent aux normales données MO et NO. Comme une courbe quelconque peut être divisée, par des normales, en tel nombre de parties que l'on veut, et chacune de ces parties remplacée par deux arcs de cercles, il s'ensuit que la courbe peut toujours être imitée par un nombre d'arcs de cercles réunis illimité.

Pour appliquer le calcul aux courbes à plusieurs centres, on nommera la normale MO, m; la normale NO, n; et l'angle NOM, 2α; et l'on aura la demi-corde

$$\mathrm{NI} = \mathrm{MI'} = \mathrm{LI''} = \frac{n+m}{2};$$

la tangente

$$\mathrm{IO} = \mathrm{I'O} = \frac{n-m}{2};$$

les rayons

$$\mathrm{HI} = \mathrm{HI'} = \mathrm{HI''} = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2}$$

et

$$\mathrm{NH} = \mathrm{MH} = \frac{\sqrt{(n+m)^2+(n-m)^2\cot^2\alpha}}{2},$$

et l'hypoténuse

$$\mathrm{OH} = \frac{n-m}{2\sin\alpha}.$$

Si, de plus, on considère le triangle COC' avec le cercle II'I'' qui y est inscrit, et qu'on nomme les tangentes CI' = CI'', T; et C'I = C'I'', t; les rayons CM = CL, R; et C'L = C'N, r; et la différence des angles OC'C et OCC', 2δ, on aura les tangentes

$$\mathrm{CI'} = \mathrm{CI''} = \mathrm{T} = \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2},$$

et

$$\mathrm{C'I} = \mathrm{C'I''} = t = \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2};$$

les hypoténuses

$$\mathrm{HC} = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2\sin\frac{\alpha-\delta}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{HC}' = \frac{(n-m)\cot\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}};$$

les côtés

$$\mathrm{CC}' = \mathrm{R} - r = \mathrm{T} + t = \frac{n-m}{2}\left(\cot\frac{\alpha+\delta}{2}\cot\frac{\alpha-\delta}{2} - 1\right),$$

$$\mathrm{CO} = \mathrm{R} - m = \mathrm{T} + \frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2}\left(1 + \cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2}\right),$$

et

$$\mathrm{C'O} = n - r = t + \frac{n-m}{2} = \frac{n-m}{2}\left(1 + \cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2}\right):$$

la corde

$$\mathrm{MN} = \sqrt{(n-m)^2 + 4nm\sin^2\alpha},$$

et la perpendiculaire

$$\mathrm{KH} = \sqrt{nm\cos^2\alpha + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\cot^2\alpha};$$

les rayons

$$\mathrm{MC} = \mathrm{LC} = \mathrm{R} = \frac{n+m}{2} + \mathrm{T} = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha-\delta}{2},$$

et

$$\mathrm{NC}' = \mathrm{LC}' = r = \frac{n+m}{2} - t = \frac{n+m}{2} - \frac{n-m}{2}\cot\alpha\cot\frac{\alpha+\delta}{2};$$

enfin

$$\frac{\mathrm{R}-r}{\sin 2\alpha} = \frac{\mathrm{R}-m}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{n-r}{\sin(\alpha-\delta)},$$

$$\overline{\mathrm{HI}}^2 = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\cot^2\alpha = \frac{\mathrm{T}t\,\frac{n-m}{2}}{\mathrm{T}+t+\frac{n-m}{2}},$$

d'où

$$\left(\mathrm{T} - \frac{n-m}{2}\cot^2\alpha\right)\left(t - \frac{n-m}{2}\cot^2\alpha\right) = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\left(\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}\right)^2,$$

et

$$\left(\mathrm{R} - m - \frac{n-m}{2\sin^2\alpha}\right)\left(n - r - \frac{n-m}{2\sin^2\alpha}\right) = \left(\frac{n-m}{2}\right)^2\left(\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}\right)^2,$$

formules qui serviront à résoudre tous les cas qui pourront se présenter.

On remarquera encore que les deux angles MON et MHN sont constamment égaux : on peut, par conséquent, faire passer un cercle par les quatre points M, H, O, N, et le rayon de ce cercle est

$$\frac{\overline{HM}^2}{2\,KH} = \frac{(n+m)^2 + (n-m)^2 \cot \alpha}{4\sqrt{4\,nm \cos^2 \alpha + (n-m)^2 \cot^2 \alpha}}.$$

La courbe à plusieurs centres la plus fréquemment employée est celle nommée *anse de panier,* qui représente une demi-ellipse ; on appelle courbe à 3, 5, 7, 9, 11, etc. centres l'anse de panier qui est formée par la réunion de 3, 5, 7, 9, 11, etc. arcs de cercles. Il existe une relation constante entre le nombre q d'arcs de cercles qui composent la courbe entière ; celui p des centres nécessaires pour décrire l'anse de panier, et celui l des normales à mener dans chaque quart de l'ellipse pour avoir le nombre d'arcs voulu. Cette relation est exprimée par les équations

$$8l + 4 = q \quad \text{et} \quad 4l + 3 = p.$$

Suivant qu'on aura déterminé un plus ou moins grand nombre de normales, la courbe entière se composera de 4, 12, 20, 28, etc. arcs de cercles, et l'anse de panier qui en résultera sera dite à 3, 7, 11, 15, etc. centres. On voit que le nombre des centres forme, dans son accroissement, une progression arithmétique dont la différence est 4 ; l'imitation de la demi-ellipse ne devrait donc pas donner lieu aux courbes à 5, 9, 13, 17, etc. centres.

Les valeurs précédemment rapportées s'appliquent à toutes les courbes à plusieurs centres, sans exception : si l'on y joint les données particulières à chaque question, on en déduira avec facilité la solution analytique de toutes celles qui pourront se présenter. On va terminer par quelques applications des principes précédents, choisies parmi les plus simples qui peuvent se présenter.

On n'a pas à considérer ici les conditions physiques, telles que l'élégance des formes, la stabilité des voûtes, la surface du débouché ; beaucoup d'auteurs en ont traité de manière à ne rien laisser à désirer : on devra, à cet égard, recourir à leurs ouvrages.

Problème I. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles semblables, c'est-à-dire de 90 degrés chacun.*

Dans ce cas, les angles OCC′ et OC′C, *fig.* 2, sont égaux, et le

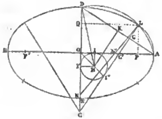


Fig. 2.

triangle rectangle COC′ est isocèle. On a les normales

$$n = a \quad \text{et} \quad m = b;$$

les angles

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{et} \quad \delta = 0;$$

$$\cot\alpha = 1, \quad \cot\frac{\alpha}{2} = \cot 22^\circ 30' = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4142136,$$

et l'on en conclut

$$\mathrm{HI} = \frac{a-b}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{HD} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

$$\mathrm{R} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cot 22^\circ 30' = a + \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

et

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cot 22^\circ 30' = b - \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Pour l'anse de panier attribuée à Huygens, les données sont les mêmes que dans ce problème, hormis que les deux arcs de petits cercles sont de 120 degrés et les deux autres de 60 degrés chacun, et que $\delta = 15$ degrés: ce qui donne alors

$$\cot\frac{\alpha-\delta}{2} = \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73205,$$

$$\cot\frac{\alpha+\delta}{2} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} = 1{,}73205;$$

et

$$R = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cot 15^\circ = \frac{3a - b + (a-b)\sqrt{3}}{2},$$

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cot 30^\circ = \frac{a + b - (a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

Dans les deux exemples, la somme $R + r$ des rayons est constamment égale, dans le premier, à $a + b$ somme des demi-axes, et dans le second, au grand axe $2a$.

Problème II. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que les centres et les points de jonction de ces arcs soient sur des perpendiculaires* IC *aux cordes* AD *qui réunissent, dans chaque quart de l'ellipse, les extrémités des axes.*

Bossut démontre, dans ses *Éléments de Géométrie,* que les conditions de ce problème rendent la différence de courbure des arcs de cercles la moins grande qu'il soit possible; en sorte que le passage d'un arc à l'autre ne saurait devenir, dans aucun autre cas, moins sensible à l'œil.

On a encore

$$n = a, \quad m = b, \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$\cot\alpha = 1, \quad \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = \frac{1}{2};$$

$$HI = GK = \frac{a-b}{2}, \quad HD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad AD = 2HK = \sqrt{a^2+b^2};$$

et en considérant les trois triangles rectangles semblables AOD, CGD et AGC', on obtient

$$DO = b : AD = \sqrt{a^2+b^2} :: DG = \frac{(a-b)+\sqrt{a^2+b^2}}{2} : DC = R,$$

$$AO = a : AD = \sqrt{a^2+b^2} :: AG = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-(a-b)}{2} : AC' = r,$$

d'où l'on conclut

$$R = \frac{a^2+b^2+(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$$

et

$$r = \frac{a^2+b^2-(a-b)\sqrt{a^2+b^2}}{2a}.$$

Problème III. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que les points de jonction L de ces arcs tombent, dans chaque quart de la courbe, sur l'ellipse même.*

Il est évident que le point L doit être commun à l'ellipse et au cercle concentrique extérieur, qui est le *lieu géométrique* de tous les points de jonction possibles. L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

celle du cercle concentrique rapporté aux mêmes axes est

$$\left(y + \frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Les valeurs de x et de y, coordonnées du point d'intersection L, sont déterminées par ces deux équations, et elles doivent dépendre chacune d'une équation du quatrième degré, puisqu'un cercle peut couper une ellipse en quatre points différents. Mais on connaît deux de ces points, A et D, pour lesquels on a

$$x = a,\quad y = 0,\quad \text{et}\quad x = 0,\quad y = b;$$

on sait donc d'avance que les équations auxquelles on parviendra seront divisibles par

$$(x - 0)(x - a) = x^2 - ax,$$

ou par

$$(y - 0)(y - b) = y^2 - by,$$

et qu'elles seront, par conséquent, réductibles au second degré. En effet, ces équations se réduisent à

$$(a + b)^2 x^2 - a(a^2 - b^2)x - 2a^3 b = 0$$

et

$$(a + b)^2 y^2 + b(a^2 - b^2)y - 2ab^3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a}{2(a+b)}\left[(a - b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\right]$$

et

$$y = \frac{b}{2(a+b)}\left[-(a-b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\right].$$

Les triangles rectangles LQC et LPC′ donnent

$$R^2 = x^2 + (R - b + y)^2$$

et

$$r^2 = y^2 + (r - a + x)^2.$$

D'où l'on conclut, en substituant et réduisant,

$$R = \frac{(a+b)^2 \pm (a-b)\sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{4b}$$

et

$$r = \frac{(a+b)^2 \mp (a-b)\sqrt{(a+b)^2 + 4ab}}{4a}.$$

Dans ces expressions, les signes supérieurs sont les seuls qui répondent à la question; les signes inférieurs se rapportent au quatrième point d'intersection de l'ellipse et du cercle qui lui est étranger.

Les arcs de cercles qui composeront la courbe ont chacun trois points communs avec l'ellipse; ils en auraient quatre, et, par conséquent, s'en écarteraient moins encore si, au lieu de lui être tangents aux extrémités des axes, ils la coupaient entre ces extrémités et les points de jonction. Seulement alors les axes de la courbe obtenue ne seraient plus égaux à ceux de l'ellipse; le grand axe serait moindre que celui de l'ellipse, et le petit axe serait un peu plus grand. On aurait la limite dans laquelle peuvent être placés les centres C et C′ pour satisfaire à cette condition, en menant par le point L une normale LN à l'ellipse; tous les rayons compris dans l'angle CLN jouiraient de la propriété demandée. Pour calculer l'étendue de cette limite, on sait que, dans l'ellipse, la sous-normale

$$PN' = \frac{b^2}{a^2}x;$$

donc la distance N′A du pied de la normale à l'extrémité du grand axe est

$$a - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x,$$

et la différence C'N', de cette quantité au rayon $C'A = r$, est

$$a - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x - r = \frac{a-b}{4a}\left[a + 3b - \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\right] = r - \frac{b^2}{a}.$$

On trouve de même que la différence CN est

$$R - b - \frac{a^2 - b^2}{b^2} y = \frac{a-b}{4b}\left[3a + b - \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\right] = \frac{a^2}{b} - R.$$

Ces différences sont essentiellement positives, et il est fort remarquable que les termes $\frac{a^2}{b}$ et $\frac{b^2}{a}$ expriment les rayons de courbures extrêmes de l'ellipse.

Problème IV. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont donnés, au moyen de quatre arcs de cercles, tels que leurs rayons R et r soient entre eux dans le rapport des rayons de courbures extrêmes de l'ellipse, c'est-à-dire* $:: a^2 : b^2$.

On a toujours l'angle $\alpha = 45°$, pour lequel

$$\cot \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation générale trouvée ci-dessus, cette équation devient

$$(R - a)(b - r) = \frac{(a-b)^2}{2}.$$

On a de plus

$$b^2 R = a^2 r;$$

d'où l'on conclut

$$R = \frac{a}{2b^2}\left[(a^2 + b^2) \pm (a - b)\sqrt{a^2 + b^2}\right]$$

et

$$r = \frac{b}{2a^2}\left[(a^2 + b^2) \pm (a - b)\sqrt{a^2 + b^2}\right].$$

La différence des rayons que donnent les conditions de ce problème est en général trop grande, et les courbes qu'elles produisent sont d'une forme peu gracieuse.

Problème V. *Imiter une ellipse, dont les demi-axes a et b sont*

donnes, en partageant chacun des quarts symétriques de la courbe par une normale MT, fig. 3, *qui coupe les deux axes sous des angles*

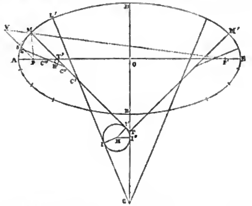


Fig. 3.

égaux, et en remplaçant chaque section du quart de la courbe par deux arcs de cercles semblables, c'est-à-dire de 22° 30′ *chacun.*

Les équations

$$8l + 4 = q \quad \text{et} \quad 4l + 3 = p,$$

dans lesquelles $l = 1$, donnent

$$q = 12 \quad \text{et} \quad p = 7;$$

la courbe demandée se composera donc de douze arcs de cercles, et sera du genre de celles dites à sept centres.

Ayant formé, à l'un des foyers F, un angle AFV de 45 degrés, c'est-à-dire égal à celui que la normale doit faire avec les axes, et ayant pris, à partir de l'autre foyer, une droite

$$VF' = AB = 2a,$$

qui rencontre en V la droite FV, si l'on élève sur le milieu de VF la perpendiculaire SM, et qu'on divise l'angle FMF′ en deux parties égales, le point M appartiendra à l'ellipse, et la droite MT sera la normale cherchée, puisqu'elle est parallèle à FV et que

$$FM + MF' = 2a.$$

Par les méthodes précédemment indiquées, on trouvera les centres H et H′ des cercles concentriques convenables à chacun des angles AT′M et MTD; on mènera les tangentes CIL′ et C″H′L, de manière à ce qu'elles fassent, avec la normale MT, des angles égaux α de 22° 30′ chacun; les intersections C, C′, C″ et C‴ seront évidemment les centres des arcs cherchés dont les rayons seront AC‴, LC″, MC′ et L′C = DC.

Pour appliquer le calcul à cette construction, nommant n' et m' les normales qui forment l'angle AT′M, n'' et m'' celles qui forment l'angle MTD, R′ et r', R″ et r'' les rayons cherchés correspondants, s la sous-normale de l'ellipse, dont la valeur est $\frac{b^2}{a^2}x$; on aura

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad y = s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\mathrm{AT'} = n' = a - \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{MT'} = m' = \frac{b^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\mathrm{MT} = n'' = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{DT} = b + \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions générales rapportées plus haut, on en déduira les valeurs de R′ et r', R″ et r'', et toutes les autres circonstances du problème qu'il faudra connaître.

Il est toujours facile de calculer, par les procédés trigonométriques ordinaires, la longueur des rayons des arcs cherchés, et par conséquent de résoudre analytiquement tous les problèmes du même genre, quelque compliqués qu'ils soient; il serait donc superflu de donner de plus grands développements à une théorie qui ne saurait offrir aucune difficulté dans son application.

On aperçoit aisément que le polygone C, C′, C″, C‴, A, quel que soit le nombre des centres employés et le système de courbe adopté, est toujours égal au plus grand rayon CD, et que si le nombre des centres était infini, ce polygone deviendrait la *développante* de la courbe tracée.

Ce n'est pas seulement à l'imitation de l'ellipse que s'applique la théorie qu'on vient d'exposer; elle convient également, et s'applique avec la même facilité, à toute autre espèce de courbes, ce qui n'a pas

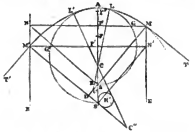
lieu pour les procédés employés jusqu'à ce jour. Ainsi, par exemple, la parabole est souvent employée dans les raccordements des routes sinueuses [*]; il serait fréquemment commode de la remplacer par des arcs de cercles, et sans rien changer aux formules générales qui ont

---

[*] On pourrait, dans ce genre, se proposer le problème suivant :

Deux droites MT *et* M'T', fig. 4, *étant données, réunir leurs extrémités* M *et* M' *par*

Fig. 4.



une courbe à trois centres, imitant une parabole dont l'axe soit dans la direction des parallèles ME, M'E'.

Élevant, par les points M et M', des perpendiculaires MD et M'D aux droites données, ainsi que d'autres perpendiculaires MN et M'N' aux parallèles ME, M'E'; celles-ci se confondront avec les ordonnées de la parabole aux points M et M', et les premières avec les normales. La sous-normale s, dans la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2ax,$$

est constamment égale au demi-paramètre a. Il en résulte que, si l'on mène NS et N'S' parallèlement à MD et à M'D, et que si, par les intersections S et S', on abaisse, sur MN et M'N', la perpendiculaire AS', cette perpendiculaire sera l'axe de la parabole à imiter, et MP et M'P' seront des ordonnées, puisque PS = P'S' sont des sous-normales $s = a$.

Maintenant, que, sur l'axe AS', on décrive une demi-circonférence qui passe, soit par les points S et G, soit par les points S' et G'; G et G' étant tels que

$$\mathrm{PG} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{PM} \quad \text{et} \quad \mathrm{P'G'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{P'M'},$$

on obtiendra, par sa rencontre avec l'axe AS', le point A qui est le sommet de la courbe, puisqu'on a aussi

$$\mathrm{AP} \quad \text{ou} \quad \mathrm{AP'} = x = \frac{y^2}{2a}.$$

On tracera, comme précédemment, les cercles concentriques H et ALM, H' et AL'M',

été données, cette théorie en fournit les moyens. Il en est de même pour toutes les occasions où les arts mécaniques ont à faire usage de courbes qui n'exigent pas une précision rigoureuse, précision qui serait d'ailleurs presque toujours difficile à atteindre.

---

qui conviennent aux normales AS et MS, AS' et M'S'; et par un point C, pris sur l'axe de manière que sa distance P″C à l'ordonnée moyenne entre celles des points L et L', soit à peu près égale à $s = a$, on mènera les tangentes LC' et L'C″ aux cercles intérieurs H et H'; elles détermineront, par leurs intersections avec les normales AS', MD et M'C″, les trois centres C, C' et C″ des arcs de cercles qui composeront la courbe cherchée.

En prenant

$$AF = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}P'S' = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}a,$$

on a le foyer F de la parabole; et si l'on voulait imiter la courbe avec plus de précision, on pourrait diviser la petite branche AM par une et la grande branche AM' par deux normales; alors l'imitation se composerait de neuf arcs de cercles réunis qui s'écarteraient très-peu de la véritable parabole, et les équations qui se rapportent à la parabole étant plus simples que celles de l'ellipse, on appliquerait le calcul à ce tracé avec plus de facilité encore qu'à celui des anses de panier.

EXPÉRIENCES

Sur les tourbillons, les ondes et les vibrations des veines et des nappes liquides;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Objet de ces expériences.

Les hydrauliciens qui se sont occupés des pertes de force vive occasionnées par les variations de section dans un canal ou dans un tuyau de conduite, ont trop négligé d'observer les mouvements des filets liquides. Cela était cependant indispensable pour bien interpréter les formules et rendre compte de quelques phénomènes singuliers qui trouveront ultérieurement leur application. Les expériences et observations décrites dans cette Note peuvent être, en général, répétées à très-peu de frais. J'en ai fait beaucoup dans des canaux découverts, analogues à ceux que les ingénieurs rencontrent souvent. De sorte qu'il suffit d'avertir les observateurs pour obtenir des développements nouveaux de faits dont l'utilité est immédiate.

I.

Expériences sur les tourbillons des veines liquides.

Il était, comme on sait, défendu par une loi romaine d'élargir au moyen d'un ajutage conique divergent les orifices des tuyaux de conduite qui n'avaient pas une certaine longueur. Or il résulte des observations suivantes sur les tourbillons, que cette loi pouvait, dans certains cas, être à l'avantage des concessionnaires, contrairement à toutes les idées reçues jusqu'à ce jour.

Un canal rectangulaire de $0^m,50$ de diamètre, ayant $0^m,10$ de profondeur d'eau, débouchait dans un réservoir de 2 mètres de large, de 4 mètres de long, de $0^m,60$ environ de profondeur modifiée par des dépôts; son extrémité en pierre de taille était évasée à peu près comme une section contractée, disposée en sens inverse. Le courant pénétrait dans ce réservoir en arrivant sensiblement à son niveau. L'eau formait de chaque côté de cet évasement des rides qui paraissaient rétrécir la section d'écoulement. Mais on pourrait croire que ce rétrécissement n'était pas réel, et qu'il ne s'agissait que d'un phénomène analogue à celui des rides, dont on doit la connaissance à M. le géné-

ral Poncelet, qui ne font pas dévier les petits flotteurs déposés en amont. Il n'en a pas été ainsi; le courant était véritablement rétréci, non-seulement à sa surface, mais jusqu'au fond de l'eau, ainsi que je m'en suis assuré en observant directement les corps légers tenus en suspension dans le liquide. Ainsi l'évasement, qui n'était cependant pas très-brusque, était une cause de rétrécissement.

Pour mieux m'en assurer, j'ai disposé des planches verticales suffisamment polies le long des parois du canal, de manière à supprimer l'évasement, et j'ai observé le mouvement des petits flotteurs, toujours déposés préalablement assez loin en amont, près des planches. Ils ont alors cessé de dévier jusqu'à leur entrée dans le réservoir J'ai aussi supprimé les tourbillons latéraux dont il s'agit, en présentant dans l'axe du courant un large prisme triangulaire dont l'arête était disposée d'une manière analogue à celle d'une pile de pont.

Ces phénomènes dépendent essentiellement de la vitesse du courant qui, pour le filet central, était de 1 mètre environ par seconde. L'évasement augmentait la section d'écoulement au lieu de la diminuer, quand les vitesses devenaient beaucoup moindres par le moyen suivant.

Je barrais en aval du grand réservoir l'orifice par lequel il déchargeait ses eaux. Il en resultait une espèce particulière d'ondes qui se balançaient d'abord sur elles-mêmes, et jetaient en arrière d'autres ondes qui remontaient le courant en amont du canal comme une sorte de mascaret. Le régime s'établissait ensuite en vertu de l'écoulement au-dessus du barrage, et les ondes devenaient fixes dans le réservoir. Quand la vitesse en amont était diminuée au moins de moitié, on ne voyait plus dans l'évasement de tourbillons aussi sensibles, le courant s'établissant d'une manière tranchée sur toute sa largeur, aux extrémités de laquelle apparaissaient de nouveaux tourbillons.

Depuis que j'ai communiqué ces faits à la Société Philomathique, en 1845, j'ai eu plusieurs fois occasion de remarquer que plus les vitesses sont grandes, plus les tourbillons latéraux dont il s'agit rétrécissent la section d'écoulement d'une manière incontestable. Le moindre dérangement dans les surfaces fixes de l'ajutage de sortie suffit d'ailleurs pour modifier le phénomène. En 1847, ces effets se présentaient d'une manière très-sensible à la sortie d'un rétrécissement formé par un banc de sable près de l'embouchure du Loiret.

Léonard de Vinci a dessiné, dans son ouvrage sur l'hydraulique, figure 71, des tourbillons analogues à ceux dont je viens de parler; mais l'auteur ne donne d'observations ni sur les mouvements des flotteurs ni sur ceux des corps plongés. Il est cependant juste de reconnaître que sa figure représente un triangle central très-allongé passant entre des tourbillons latéraux. Mais il s'agissait de savoir comment se comportaient ces tourbillons dans des évasements beaucoup moins brusques.

En général, le courant se rétrécit quant à la partie qui conserve une assez grande vitesse, et il s'élargit en produisant des tourbillons dont l'ensemble forme de part et d'autre une sorte de courant parabolique. Les flotteurs répandus sur ce double courant latéral, à sa limite extérieure, l'abandonnent en partie, reviennent en arrière, et se font reprendre par les premiers tourbillons dont j'ai parlé, après s'être dirigés vers

eux en passant sur des ondes dont le mouvement apparent est en sens inverse de celui de ces flotteurs [*].

Les expériences dont je viens de parler ont pour objet spécial l'étude des remous-tourbillons; elles n'ont pas le même but que celles de MM. Vauthier, publiées, en 1848, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, et qui confirment la théorie connue des remous. On voit dans quel sens il faut tenir compte de l'effet de ces tourbillons dans la théorie des débordements des rivières. Étant formés aux dépens de la force vive de la veine liquide, ils ne peuvent, par la communication latérale du mouvement des liquides, lui restituer ce qu'ils lui ont pris.

II.

Expériences sur le mouvement de l'eau dans les coudes à angle droit brusque.

Dans beaucoup de circonstances l'eau est amenée sur les roues hydrauliques par un canal rectangulaire, et, quand on veut arrêter l'usine, on bouche transversalement ce canal au moyen d'une planche qui, dans l'autre cas, fait partie de la paroi verticale. Il en résulte un coude brusque dans le prisme liquide qui s'échappe par l'ouverture latérale abandonnée ainsi par cette planche rectangulaire.

Le mouvement de l'eau n'est pas le même quand l'écoulement se fait directement en l'air que dans le cas où il se fait par un bout de canal perpendiculaire, ou à peu près, à la paroi verticale dont la planche fait partie alternativement. Si l'écoulement se fait immédiatement dans l'air, la direction des filets fait avec la partie d'aval de la paroi un angle aigu qui dépend non-seulement de la position de chaque filet, mais de la vitesse moyenne de l'ensemble. Pour d'assez grandes vitesses, l'angle du filet central ne paraît pas différer beaucoup, dans certaines circonstances, de la moitié d'un angle droit. Le dernier filet d'aval fait alors un angle sensiblement moins aigu, à cause de la réaction de la planche posée transversalement dans le canal.

Si l'écoulement se fait par un bout de canal à angle droit, comme je l'ai déjà expliqué, l'eau qui, dans l'autre cas, se balançait comme une surface dont la section aurait une forme analogue à une sorte de S, prend, en général, une forme plus calme. Un seul fil tendu coupait alors la surface, il en fallait deux pour que la section fût assez sensiblement touchée dans tous ses points, le canal ayant $0^m,60$ de large, $0^m,20$ de profondeur d'eau, la vitesse du filet central étant d'environ $0^m,60$ par seconde. En observant le mouvement des petits flotteurs et des corps légers tenus en suspension dans le liquide, j'ai remarqué que l'écoulement se faisait principalement par la seconde moitié de l'orifice latéral. Il résulte même de la courbure de la veine liquide, qu'en général il

[*] Les phénomènes qui ne peuvent se présenter sans multiplier les points de contact de l'eau frottant sur celle d'un réservoir, peuvent expliquer, selon moi, par quelle raison le mouvement se transmet mieux en ligne droite dans un tuyau de conduite, où les coefficients des frottements sont cependant plus grands que dans un milieu formé de l'eau elle-même, selon les expériences décrites dans mon dernier Mémoire.

doit suffire de donner au rayon de courbure intérieur d'un coude une grandeur analogue à celle du diamètre du canal rectangulaire, pour faire disparaître, quant à la partie la plus essentielle, l'espèce particulière de contraction de la veine provenant du mouvement d'amont. Or cette contraction est une cause évidente de solution de continuité dans le phénomène, et, par conséquent, dans l'application des formules de la résistance des coudes. Ces observations, faites sur une assez grande échelle, étendent en les confirmant celles que Du Buat avait faites sur des tuyaux d'un petit diamètre, en constatant le rayon de courbure pour lequel la veine n'était plus renvoyée dans l'axe.

J'ai eu occasion de les confirmer, notamment sur un canal ayant le rayon de courbure dont il s'agit, mais où les vitesses étaient très-petites. Il faut, dans ce cas, pour bien observer les directions des flotteurs en divers points de la section, se servir de feuilles d'une largeur suffisante pour que leur marche soit bien régulière lorsque l'eau n'est pas très-pure.

Quant aux canaux à grandes vitesses dont je me suis plus spécialement occupé dans les circonstances susdites, il se faisait le long du plan vertical obturateur une espèce particulière de bouillonnement alternatif, qui ressemblait à une sorte de *crinière liquide*. Les effets de ce genre, joints aux tourbillons dans l'angle du coude, donnaient aux filets fluides une courbure continue, qu'il était intéressant d'observer pour constater la différence provenant, dans cette courbure, de ce que je reculais ensuite à une distance de plusieurs mètres la position de l'obturateur vertical. Denis Papin avait déjà remarqué que l'eau tourbillonnait dans la partie *vive* de l'angle droit brusque. La différence des trajectoires dans les deux cas étant peu considérable, j'en ai conclu qu'il devait en être ainsi de la résistance passive éprouvée par suite des mouvements curvilignes. C'est en effet ce qui résulte de la comparaison que tout le monde peut faire entre le résultat d'une expérience de Venturi sur un coude à angle droit vif, et celui d'une expérience de S'Gravesande, rapportée dans son *Traité de Physique*. Mais personne n'avait encore fait ce rapprochement entre des faits isolés trouvés par ces savants célèbres, et il était utile de les appuyer par des observations d'un autre genre, faites d'ailleurs plus en grand.

Ce résultat est utile dans l'étude de diverses machines hydrauliques, pour lesquelles l'écoulement se fait par un orifice disposé immédiatement sur la paroi d'un tuyau de conduite horizontal. Il en résulte, en effet, qu'il doit être permis, sans crainte de se tromper en moins sur la résistance passive, de se servir, pour ce cas, du coefficient de la résistance des coudes à angle droit vif, étudiée pour d'assez grandes vitesses par Venturi.

Les directions des flotteurs, posés en amont sur la surface de l'eau, se pliaient régulièrement sans rencontrer la surface transversale du coude, à cause de la résistance des tourbillons. Les petits corps tenus en suspension dans le liquide ou roulant près du fond prenaient des directions analogues. Toutefois, il se présentait sur l'entaille contre laquelle la planche en aval devait s'appuyer quand elle fermait l'orifice latéral, un mouvement oscillatoire très-régulier et très-prononcé formant une onde sans translation apparente dont je parlerai dans le § V.

Conservant tout l'orifice latéral ouvert, j'ai ensuite disposé parallèlement aux parois du canal, dans le milieu dn lit, une planche d'au moins 2 mètres de long, ayant pour but de faire voir ce qui se passerait dans une ouverture beaucoup plus large que la section du canal avec de plus grandes vitesses. Cette planche, qui s'élevait toujours au-dessus de l'eau par son arête supérieure, l'autre touchant le fond du canal, s'appuyait par une de ses extrémités verticales contre la planche rectangulaire qui formait le barrage. Il se présentait une sorte d'onde permanente, fournissant avec régularité, quoique avec bouillonnement, l'écoulement par la seconde moitié de l'orifice latéral. Dans la première moitié de cet orifice, l'écoulement était presque nul. Il résulte de ces effets qu'il ne doit y avoir aucun avantage bien sensible à donner à cet orifice un diamètre plus grand que celui du canal.

Cette conséquence est importante pour l'étude des machines hydrauliques, où l'écoulement de dedans en dehors se fait par un orifice immédiatement disposé sur la paroi d'un tuyau de conduite. On connaissait une remarque analogue à cette dernière, sur la grandeur qu'il convient de donner au diamètre de sortie de la soupape d'arrêt du bélier hydraulique de Montgolfier. Mais le phénomène pouvait être influencé par la soupape, et il était utile de l'étudier séparément d'ailleurs sur une assez grande échelle.

Il se présente sur la théorie des coudes de cette espèce une question intéressante. Doit-on augmenter ou diminuer leur section pour avoir le moins de résistance possible à surmonter, dans le cas où un tuyau débouche directement dans un autre, au lieu de déboucher immédiatement à l'air libre, comme dans l'expérience précédente?

Cette question se rattache à celle du § I sur l'effet de l'évasement d'un tuyau de décharge. En effet, il résulte des évasements qui ne sont pas très-graduellement disposés, des tourbillons qui, au lieu d'augmenter la section réelle d'écoulement, la diminuent d'une manière d'autant plus sensible que la vitesse est plus grande. Ces effets sont bien connus des bateliers qui remontent le courant des rivières en choisissant la partie des coudes où ils sont favorisés par ce genre de mouvements. Mais ce n'est pas seulement de la section qu'il s'agit, il faut encore tenir compte de ce que la réaction doit produire un effet analogue à celui d'une veine tombant d'un vase sur un plan, et qui, selon les expériences de Hachette, diminue notablement le débit quand le plan n'est pas assez loin de l'orifice. Il résulte de là que, pour les coudes à angle droit vif, il est utile de faire déboucher le tuyau d'amont dans un tuyau d'un diamètre plus que double de celui du premier. Un tourbillon ramène, il est vrai, en général, les molécules liquides vers l'orifice. Or il faut faire en sorte que ce tourbillon ne nuise pas trop à l'écoulement par sa direction en aval. Quand le diamètre du canal, dans lequel débouche un premier canal faisant avec lui un angle droit vif, est assez grand, on voit distinctement de quelle manière se comporte ce tourbillon qui ne retombe pas avec force sur le premier orifice d'écoulement.

On peut tirer des phénomènes du mouvement de l'eau dans les coudes des conséquences intéressantes sur la formation des vallées, ou du moins des vallées sablonneuses. En effet, si un fluide est successivement animé de mouvements en sens contraires dans

une vallée disposée en forme de coude, et surtout de coude à angle droit brusque, la disposition des obstacles est essentielle. Si, par exemple, ils sont disposés d'un seul côté de l'angle plus près de la partie convexe que de la partie concave, il en résulte que, dans un sens du mouvement de ce fluide, ils peuvent ne pas gêner bien sensiblement ce mouvement, et avoir beaucoup d'influence dans l'autre sens.

III.

Expériences sur les tourbillons et les ondes résultant d'un barrage noyé.

J'ai communiqué à la Société Philomathique, le 8 août 1846, une espèce particulière de mouvement de l'eau qui a été confirmée depuis plus en grand (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIIe cahier, pages 149 et suivantes). Quelques mots écrits sur ce sujet par Léonard de Vinci et par Du Buat n'étaient pas suffisants, ces expérimentateurs célèbres avaient plutôt pressenti qu'aperçu le phénomène.

J'ai remarqué dans mon Mémoire sur les ondes, publié dans le tome XIII de ce Journal, que si l'on traîne un corps selon l'axe d'un canal rectangulaire, rempli d'eau en repos, même assez large par rapport à ce corps, l'onde qui en résulte s'étend sur toute la largeur du canal comme une barre. Il est intéressant de remarquer que, dans l'eau en mouvement, une *barre* fixe donne lieu à un phénomène, inverse sous certains rapports, ce qui ne peut provenir que de la réaction latérale qui renvoie le mouvement vers l'axe.

L'action de l'eau aux deux extrémités d'un barrage submergé est d'une nature toute particulière, par suite des phénomènes de la percussion contre la surface d'amont. Il en résulte qu'on voit se produire en aval du barrage le curieux phénomène des ondes quadrangulaires fixes, de plus en plus affaiblies, tel que Bidone l'a décrit. Mais ce célèbre hydraulicien ne l'avait observé qu'à la suite de la contraction à l'origine d'un canal. Ainsi ce croisement de filets, attribué par lui au phénomène de la contraction, montre bien qu'en effet il y a une contraction d'une espèce toute particulière, occasionnée par le mouvement du liquide aux extrémités du barrage où il se présente aussi une sorte de ronde liquide.

Pour que le phénomène se présente dans toute sa netteté, il ne faut pas trop élever le barrage parce qu'alors la nappe se brise. Mais quand les ondes étaient bien régulières, le sommet du barrage étant, par exemple, à la moitié de la profondeur totale de l'eau dans les canaux dont je me suis servi, le profil, pris au moyen d'une planche verticale, parallèle aux parois du canal et passant par les sommets des pyramides liquides, ainsi que par les diagonales de leurs bases, présentait une forme analogue à celle que Bidone a dessinée dans ses beaux Mémoires.

Quand on supprimait le barrage, le phénomène des ondes quadrangulaires disparaissait, le canal étant sans aspérités apparentes. La largeur de ce canal était de $0^m,50$, sa profondeur d'eau de $0^m,20$; la vitesse moyenne, le barrage étant supprimé, était de $0^m,60$ environ. Le barrage était fait en briques ordinaires, formant un mur régu-

lièrement construit. Pour résister à la force du courant, j'avais disposé les briques en long. Un extrait de ma communication à la Société Philomathique est inséré dans le journal l'*Institut*, 1846, tome XIV, page 287.

La lame ne se brisait pas quand le barrage était suffisamment plongé ; il y avait des tourbillons dans tous les angles. Dans le réservoir traversé par le courant décrit dans le § I, des tourbillons intéressants se formaient à chacun des angles opposés à l'embouchure d'amont du canal. Les petits flotteurs colorés, formés de débris de fleurs diverses, s'enfonçaient souvent au fond de l'eau, dans un des angles où le tourbillon se faisait avec plus de force autour d'un prisme vertical formé par une bonde. Les flotteurs, ainsi enfoncés dans cet angle, traversaient toute la largeur du réservoir sans revenir à la surface avant d'avoir achevé cette traversée. Ils remontaient ensuite dans l'autre angle, revenaient tout le long d'une des parois du réservoir pour se faire reprendre par le courant à sa sortie du canal d'amont. La traversée latérale des flotteurs au-dessous du courant est un effet de l'action des tourbillons engendrés dans tout le système liquide à cette extrémité du réservoir. (Journal l'*Institut*, 1845, tome XIII, page 403.)

On voit que ce qu'il y a d'essentiel dans les conséquences déduites ultérieurement des phénomènes produits par les barrages noyés, relativement à la stabilité qu'il faut donner à leurs fondations, etc., est non seulement indiqué depuis longtemps dans mes communications à la Société Philomathique, mais avec des détails qui n'ont même pas été reproduits, et qui caractérisent encore mieux le phénomène

Parmi les effets des tourbillons formant un effet analogue à celui des barrages, je mentionnerai encore celui qui se présente dans un tuyau ou canal dont la direction est inclinée en sens contraire de celle d'un courant principal. Les tourbillons qui se forment devant l'*éperon* empêchent d'appliquer sans modification le théorème de D. Bernoulli sur les pressions des liquides en mouvement. L'eau était refoulée en arrière dans le tuyau ou canal additionnel dont il s'agit, et sortait plus haut que l'orifice de jonction, bien que la première extrémité de sortie restât ouverte. Dans les canaux découverts horizontaux, il résulte de ces tourbillons des ondes rétrogrades très-sensibles dans le bout de canal dont l'axe fait de la même manière un angle aigu avec celui du principal courant.

IV.

Expériences sur les vibrations rapides des veines liquides.

On a longtemps admis que l'écoulement de l'eau d'un vase était uniforme sous une hauteur de niveau constante. Ramazzini paraît être le premier qui ait remarqué dans les veines liquides en aval d'un coude à angle droit brusque des oscillations périodiques, ne provenant pas seulement de la chute du liquide retombant du sommet d'un jet d'eau. (*De fontium Mutinensium admiranda scaturigine Tractatus physico-hydrostaticus*, in-4°, Modène, 1691, très-rare.)

F. Savart a développé quelques intermittences provenant des phénomènes de la percussion de l'eau. Mais personne n'avait remarqué que la seule disposition de l'orifice de sortie permettait de faire alternativement cesser et renaître un jet d'eau, comme par un mouvement régulier de respiration, et cependant sans matelas d'air ni pièce mobile.

Pour obtenir cet effet singulier au moyen d'un ajutage cylindrique implanté sur un tuyau de conduite relevé verticalement en aval de son réservoir alimentaire, il m'a suffi de disposer à l'orifice de sortie des obturateurs partiels fixes en bois qui en interceptaient une partie. Les uns étaient des espèces de demi-cylindres, des coins disposés verticalement dans l'ajutage et transversalement quant à l'axe du tuyau de conduite. Les autres étaient des pièces extérieures posées au-dessus de l'ajutage. Il était surtout intéressant d'observer les jets inclinés, parce que l'intermittence, la cessation complète du jet, qui se reproduisait indéfiniment avec une extrême régularité, comme les battements d'un pendule, ne pouvaient pas être attribués à la chute de l'eau retombant sur la colonne ascendante.

Les intermittences ne venaient pas non plus de quelque mouvement dans de l'air emprisonné; je m'en suis assuré au moyen de tubulures disposées de diverses manières sur le tuyau horizontal, et alternativement remplies d'air et d'eau, ce qui ne changeait rien aux effets dont il s'agit. Or, dans tous les cas, le moindre dérangement de l'obturateur suffisait pour rétablir la permanence du jet d'eau sans qu'on changeât rien au tuyau de conduite.

Le réservoir dont je me suis d'abord servi était un peu conique, la base inférieure ayant $0^m,13$ de diamètre et le sommet ayant un diamètre de $0^m,20$. La hauteur du réservoir était $0^m,29$. Le tube horizontal avait $0^m,015$ de diamètre et $0^m,20$ de long. Les divers ajutages verticaux avaient $0^m,035$ de haut.

J'ai recommencé les mêmes observations en portant la hauteur de ce réservoir à $1^m,2$ au-dessus de l'orifice du jet; il se présentait encore des intermittences dans des circonstances analogues, mais le jet ne cessait plus complétement.

Je dois avertir les personnes qui voudraient recommencer ces expériences, qu'il faut, en général, beaucoup de tâtonnements pour y parvenir, même quand on les a déjà faites plusieurs fois.

Ce genre de phénomène se présente dans beaucoup de circonstances, quelquefois très-difficiles à produire, mais assez nombreuses pour qu'il soit désormais indispensable d'en tenir compte dans l'explication des fontaines naturelles. Il paraît dépendre moins de la pression de l'eau du réservoir que de la hauteur des jets. J'ai observé des intermittences à peu près complètes dans un jet d'eau irrégulier sortant sous une pression d'au moins 2 mètres d'eau par une fissure de porte d'écluse de navigation, le jet s'élevant à au moins $0^m,50$ de haut. Pour un orifice de $0^m,02$ de diamètre, la cessation à peu près complète d'un jet d'eau vertical ne se présentait plus pour une hauteur au-dessus de $0^m,30$ environ. Enfin il faut tenir compte de ce que les circonstances en apparence les moins importantes changent complétement ces effets et rendent au jet sa permanence.

Dans les cours d'eau les mieux arrivés à la permanence, j'ai observé des oscillations parfaitement régulières dans les angles concaves. Je suis parvenu à en produire artificiellement au milieu d'un canal rectangulaire de $0^m,50$ de large et de $0^m,18$ de profondeur, dont l'eau avait une vitesse moyenne de $0^m,60$ environ par seconde. Pour cela, je disposais dans ce canal, d'une manière fixe, un de ces polyèdres creux en bois, dont tout le monde connaît la forme et les dimensions, dans lequel les blanchisseuses se mettent pour laver le linge. L'ouverture était disposée du côté d'amont, sous des angles que j'obtenais par le tâtonnement. Il en résultait, dans les angles à l'intérieur de cet appareil, des oscillations parfaitement régulières, et d'une hauteur considérable par rapport à la *hauteur due* à la vitesse moyenne de l'eau dans le canal. Le moindre dérangement dans les surfaces faisait cesser cette espèce de mouvement de pendule battant pour ainsi dire la seconde, et rendait au courant sa permanence.

Il est difficile de bien définir la cause de ces divers effets, qui ne se sont présentés jusqu'ici d'une manière complète que par suite de pièces transversales, soit à l'extrémité, soit loin de l'extrémité d'une conduite ou d'un canal. Il s'agit d'un phénomène de percussion, combiné peut-être, du moins dans certains cas, avec un phénomène d'ajutage plus ou moins rempli par la vraie section de la veine liquide; mais je l'ai vu se présenter dans des circonstances tellement singulières, qu'il est prudent de s'en tenir provisoirement à la simple exposition des faits.

Ainsi, un jet d'eau vertical sortait d'un orifice sensiblement circulaire, sans obturateur, de $0^m,0025$ environ de diamètre, entouré de dix jets d'eau d'un diamètre de $0^m,002$ environ, dont chacun sortait à $0^m,012$ du jet central. Celui-ci s'élevant à des hauteurs de $0^m,23$ et au-dessous, ainsi que la couronne de dix jets un peu inclinés, il cessait alternativement, d'une manière complète et régulière, comme par un véritable mouvement de respiration, tandis que tous les autres s'élevaient à une hauteur sensiblement constante. Pour une hauteur de $0^m,30$, le jet vertical ne cessait plus alternativement d'une manière aussi complète, il y avait seulement des intermittences très-sensibles. La plaque de cuivre, dans laquelle étaient disposés des orifices, avait environ $0^m,0015$ d'épaisseur. Pour l'orifice du jet vertical, l'épaisseur était d'environ $0^m,002$. La plaque était trop bien polie pour que l'air pût s'arrêter longtemps pardessous; or le phénomène durait indéfiniment. Pour les hauteurs très-petites, les dix jets un peu inclinés étant toujours sensiblement uniformes, les intermittences du jet central étaient encore très-régulières.

Les intermittences étaient d'autant moins sensibles relativement que les jets étaient plus élevés; j'ai observé des hauteurs plus grandes de $0^m,50$ à 1 mètre et au-dessus, pour lesquelles il y avait bien moins d'intermittences malgré la division des gouttes. Or, pour augmenter la hauteur des jets, il suffisait d'ouvrir plus ou moins un robinet à une certaine distance sur le tuyau de conduite, ce qui semble indiquer une influence quelconque des phénomènes particuliers aux étranglements. Si le jet central présente d'une manière caractérisée l'effet singulier dont il s'agit, tandis qu'il n'en est pas ainsi des autres, ne serait-ce pas à cause de quelques effets particuliers à l'étranglement immédiat? Les autres filets liquides s'épanouissent vers la couronne de jets, en perdant

quelque chose de la nature primitive de leur mouvement à cause de l'évasement du sommet du tuyau. J'ai, en effet, remarqué d'autres jets inclinés qui présentaient le phénomène dont il s'agit; l'inclinaison de ceux-ci n'est donc pas une raison péremptoire.

Les circonstances dans lesquelles les colonnes liquides entrent en vibration par suite de la disposition des orifices, ne sont pas encore assez connues pour être utiles à l'art du fontainier dans l'étude de l'état d'une conduite engorgée. Mais ce que j'ai dit fait déjà concevoir la possibilité de parvenir à connaître un nouveau moyen d'inspection pour le service des eaux d'une grande ville. Il est intéressant d'entrevoir qu'on pourra en venir là au moyen de la seule vibration des jets d'eau. Voici, en effet, de nouveaux exemples de la vibration des colonnes liquides.

Lorsqu'un tube partant du fond d'un réservoir se relève verticalement à une certaine distance, et que sur la partie horizontale on établit une prise d'eau d'un certain diamètre, le liquide se tient beaucoup plus haut dans le tube relevé en aval que dans un tube vertical en amont. Cette expérience est due à Ramazzini, page 77, *fig.* 7. Il n'a pas donné les dimensions de son appareil, dans lequel il dit que le liquide n'atteignait, dans le tube d'aval, que les cinq sixièmes de la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de l'orifice de la prise d'eau intermédiaire.

J'ai répété cette expérience avec l'appareil dont j'ai donné ci-dessus les dimensions, et, de plus, je suis parvenu à augmenter notablement la hauteur de la colonne d'aval en inclinant en arrière le tube du jet d'eau qui était vertical dans l'appareil de Ramazzini. De sorte que la différence d'un sixième, dont je viens de parler, a été diminuée d'environ moitié. Elle a été encore plus diminuée, même avec un ajutage de sortie vertical, lorsque cet ajutage a été disposé près du réservoir à une distance égale tout au plus au diamètre du tube. Quand l'ajutage était horizontal et encore plus près de ce réservoir, l'eau parvenait alternativement à la hauteur même du réservoir dans le tube d'aval, mais on ne peut pas dire précisément que c'était à des intervalles périodiques, car il paraissait se présenter à certaines époques des oscillations accumulées.

Ces expériences concourent, avec celles de Ramazzini, à prouver que non-seulement l'eau peut s'élever en aval d'un puits artésien à des hauteurs bien plus grandes que l'orifice de ce puits, mais que, de plus, il se présente en aval des oscillations, dont il y a lieu de penser que les fontaines naturelles peuvent se servir pour élever de l'eau à une petite hauteur, même au-dessus du niveau de la source, si le tuyau ou conduit souterrain est convenablement rétréci à son sommet.

Diverses causes mettent une colonne liquide en vibration; dans les grandes cascades tombant sur un plafond en pierres, l'eau rejaillit dans diverses circonstances en donnant des percussions véritablement périodiques, mais le phénomène doit être influencé par les mouvements de l'air.

On sait qu'un cylindre autour duquel s'enroule une veine liquide s'élevant verticalement de bas en haut, peut, dans certains cas, être soutenu indéfiniment sans autre

appui, en tournant comme une véritable roue verticale. Ses mouvements oscillatoires dans la verticale ne lui font pas quitter le jet qui le soutient; ils sont intéressants à observer comme un exemple des effets d'intermittence de la veine enroulée, même à une assez grande hauteur au-dessus de l'orifice d'où elle sort.

Je mentionnerai encore l'observation suivante. Si, lorsqu'un jet d'eau présente à son sommet de petites variations périodiques, on dispose au-dessus un entonnoir fixe, cela ne diminue pas le mouvement oscillatoire; au contraire, l'eau se jette périodiquement un peu plus haut en y donnant de petits coups de bélier alternatifs. Si l'on baisse l'entonnoir de manière à obliger le jet de le traverser selon son axe, il y a certaines conditions, par exemple pour un jet de $0^m,008$ de diamètre et de $1^m,20$ de haut, dans lesquelles le jet diminue de hauteur, la partie du jet qui a traversé l'entonnoir devient plus sensiblement oscillante.

En général, quelle que soit la cause des oscillations d'un jet d'eau, quand elles sont considérables, comme cela se présente, par exemple, pour le grand jet d'eau des Tuileries, il est évident que si un entonnoir convenablement disposé est fixé à une hauteur intermédiaire entre les limites de hauteur minimum et maximum du jet, il en résultera des coups de bélier hydraulique qui augmenteront sa hauteur à des intervalles plus ou moins irréguliers. Si un second entonnoir est disposé au-dessus, le jet exhaussé par le premier coup de bélier en donnera un second qui l'exhaussera encore, et ainsi de suite. De sorte qu'il peut en résulter des effets très-curieux dans les jardins publics et qui se présentent sans doute aussi dans les grottes naturelles.

Depuis que j'ai fait connaître pour la première fois, le 25 juillet 1846 (Journal l'*Institut*, tome XIV, page 271), ce genre singulier de vibrations, M. Darcy, inspecteur divisionnaire des Ponts et Chaussées, a fait sur les rétrécissements dans l'intérieur des conduites, des expériences d'où il résulte que la présence des diaphragmes rend extrêmement difficile, dans certains cas, d'obtenir un écoulement uniforme. On ne sait pas encore d'une manière positive en quoi consistent les conditions dont il s'agit, et il est bien intéressant pour l'art du fontainier de les mieux connaître. J'ai soulevé la question, elle sera tôt ou tard résolue par les ingénieurs. Une Note sur les vibrations, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIII[e] cahier, page 159, confirme la nouveauté de ces faits que j'avais signalés depuis quatre ans.

M. Coriolis avait depuis longtemps proposé aux ingénieurs des eaux de Paris d'étudier plus en grand par l'expérience mes idées sur le frottement de l'eau, la position et la forme des rétrécissements. Malheureusement les expériences faites sous ses auspices furent interrompues par sa mort prématurée.

Manoury d'Ectot a fait osciller une colonne liquide très-courte sans pièce mobile, au moyen d'un obturateur fixe, formé d'une sorte de bouton horizontal au sommet d'une tige. Mais il y avait au-dessus un tuyau où l'élévation de la colonne liquide était une seconde cause particulière d'oscillation. Ce qu'il y a de certain, c'est que toutes les explications de ce singulier appareil, données en France et à l'étranger, sont aujourd'hui

reconnues comme erronées. J'ai vu même élever des doutes sur la possibilité de son jeu indéfiniment abandonné à lui-même.

M. Charles Blagden (*Annals of philosophy*, tome I, page 191) croyait l'expliquer en disant qu'un tube rétréci à son extrémité, pénétrant dans un tuyau plus large, devait occasionner des oscillations dans une colonne liquide, malgré l'assertion formelle de Manoury d'Ectot, qui déclare que, *sans le diaphragme, il n'y a pas d'oscillation.* (*Catalogue des Collections du Conservatoire des Arts et Métiers*, page 7.)

J'avais fait de mon côté, en 1834, une expérience analogue à celle qui est indiquée par M. Blagden, et j'avais reconnu que les oscillations n'avaient pas lieu, en effet, *sans diaphragme fixe;* c'est-à-dire qu'il y en avait d'abord, mais qu'elles diminuaient de plus en plus et devenaient enfin sensiblement nulles, l'écoulement se faisant ensuite comme à l'ordinaire dans l'espace resté libre entre les deux tuyaux.

L'explication de Carnot et Prony étant aussi formellement contraire à l'expérience dont je viens de parler, j'ai pensé depuis que le phénomène annoncé par Manoury d'Ectot pourrait bien avoir quelque analogie avec celui qui fait l'objet de ce paragraphe, et dont il ne paraît pas qu'il eût connaissance.

Il n'est pas étonnant d'ailleurs que des hommes tels que Carnot et Prony ne s'en soient pas aperçus non plus, à une époque où la partie physique de l'hydraulique était bien moins avancée qu'aujourd'hui. Prony connaissait seulement des variations sensibles dans la hauteur du sommet des jets d'eau.

Ce qui précède achèverait au besoin de montrer la différence essentielle entre les principes de mes machines hydrauliques et celle de Manoury d'Ectot dont il s'agit. Ses vibrations rapides à percussion exigent des tuyaux courts. Mes oscillations exigent, au contraire, des tuyaux d'une certaine longueur, et même, dans certains cas, d'une longueur assez grande.

Navier pensait que cet appareil remarquable de Manoury d'Ectot ne pouvait pas être employé avec avantage. Il paraît, en effet, qu'il sera difficile de faire osciller avec une régularité suffisante, par ce moyen, des colonnes liquides d'une hauteur considérable. On ne sait pas d'ailleurs, d'une manière assez positive, quels sont ceux des modèles du Conservatoire qui ont convenablement marché.

V.

Expériences sur les rétrécissements dans le mouvement oscillatoire.

La veine liquide à la sortie d'un rétrécissement se dilate en augmentant nécessairement la pression en aval, à cause du choc qui en résulte. Je m'en suis assuré directement en disposant un rétrécissement dans un tuyau vertical, et en enfonçant dans le système un tube de verre à des profondeurs diverses. Au reste ce fait peut être regardé comme évident à priori. Loin d'admettre, avec divers auteurs, que l'on ne doit pas tenir compte de ce choc, il y aurait bien plutôt lieu de croire qu'il faut tenir compte de ce que le changement de vitesse ne se fait pas toujours d'une manière aussi brusque

que le suppose le théorème de Borda. Il est même très-possible que la longueur d'un tuyau, formant un rétrécissement à l'intérieur d'une conduite, ne soit pas sans influence sur la manière plus ou moins graduelle dont la colonne liquide se dilate à la sortie de l'étranglement, du moins dans un mouvement oscillatoire d'une étendue assez limitée. La manière dont une veine liquide se dilate graduellement à l'entrée d'un réservoir plus large *qu'elle traverse*, jette beaucoup de jour sur cette matière. Il est incontestable que le théorème de Carnot ne doit pas être appliqué sans réserve à l'étude de ce genre tout particulier de phénomènes, où la vitesse centrale se conserve plus loin qu'on ne le croit.

Mais il se présente une nouvelle considération physique. Si la vitesse centrale peut se conserver assez loin de l'origine d'un tuyau malgré les frottements, comme cela résulte des faits exposés dans mon dernier Mémoire publié dans ce volume, page 169, il résulte de cette circonstance que cela modifie les coefficients des frottements contre la paroi pour une vitesse moyenne donnée dans un même instant. Or, si la course de l'oscillation est assez petite par rapport à la longueur du tuyau de conduite où elle se fait, il y a lieu de penser que l'influence dont il s'agit, sur le mode d'action des frottements, ne s'exerce d'une manière bien sensible qu'à une distance de l'étranglement fonction de la course de l'oscillation. Cette influence doit donc être peu sensible, dans ce cas, par rapport au déchet total. Je n'ai pas trouvé, en effet, que la position des rétrécissements dans la section du tuyau eût une influence bien sensible dans cette circonstance sur le mouvement ascensionnel, du moins quand j'avais soin de les évaser convenablement en amont, de manière à éviter d'avoir à tenir compte des phénomènes de la contraction de la veine liquide sur la vraie section de l'étranglement. Pour former un étranglement laissant un orifice dont l'axe était le même que celui du tuyau, il suffisait de disposer convenablement un bout de tuyau évasé en amont et serré par le haut avec une bande de papier. Pour avoir, au contraire, un étranglement laissant un orifice annulaire entre un cylindre central et la paroi du tuyau, il suffisait de fixer dans le tuyau un cylindre en bois latéralement retenu par une petite planche qui le traversait. Alors on obtenait l'évasement convenable en taillant les extrémités. Pour ces expériences comparatives, la section de l'étranglement était, en général, un tiers environ de celle du tuyau de conduite principal.

Le fait de l'égalité sensible de résistances passives pour des positions diverses de l'étranglement dans la section du tuyau de conduite n'a été observé que pour un tuyau assez long par rapport à la course de l'oscillation, et ne doit être accueilli qu'avec quelque réserve. Une partie des faits mentionnés dans mon précédent Mémoire, page 169, montre qu'il n'en est pas ainsi dans des tuyaux beaucoup plus courts. Pour ce dernier cas, j'aurais voulu présenter un résultat plus direct; mais, dans les tuyaux très-courts, la résistance provenant d'étranglements formés de pièces fixes s'est trouvée trop grande relativement à celle du frottement modifié par leur présence.

J'ai publié, dans le tome III de ce Journal, page 209, un Mémoire sur les oscillations de l'eau dans les tuyaux de conduite, où je rends compte de mes expériences sur

un appareil dans lequel j'ai ensuite disposé ces divers étranglements. Mais il serait difficile de bien étudier leurs effets sans relire ce Mémoire, les Notes insérées sur ces matières dans ce Journal ont d'ailleurs seulement pour but de fixer les idées sur les points principaux d'un ouvrage qui paraîtra prochainement. Je me contenterai donc d'énoncer le fait suivant.

Un étranglement était formé au moyen d'un bout de tuyau d'environ $0^m,02$ de diamètre et de $0^m,17$ de long, disposé avec un évasement en amont dans un tuyau de conduite d'environ $0^m,047$ de diamètre et de $0^m,33$ de long, qui se relevait verticalement à son autre extrémité, la première débouchant dans un réservoir. La résistance passive provenant de l'étranglement était à peu près égale à toute la résistance en frottement de la conduite dont il s'agit, où une colonne liquide était en oscillation. Or, si le travail en frottement dans le bout de tuyau rétréci est en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres, on trouve, en définitive, la résistance due à l'étranglement sensiblement moindre qu'elle ne le serait selon la théorie de Borda. Il y a lieu de croire que la veine ne se dilate pas aussi brusquement dans cette circonstance que le suppose cette théorie, même en tenant compte de ce qu'il paraît résulter de mes recherches que, dans ces tuyaux très-courts, le coefficient du frottement est très-différent de ce qu'on croit, à cause de la manière dont se distribuent les vitesses à leur intérieur.

Si, au contraire, on ne tenait pas même compte, avec Borda, du surcroît de pression provenant de la dilation de la veine en vertu de son choc à la sortie de l'étranglement, on trouverait, par suite du frottement quelconque dans le tuyau rétréci, que la résistance passive devrait être augmentée de plus de moitié en sus quant à l'effet de l'étranglement.

Cette expérience est donc favorable à la théorie de Borda, mais en tenant compte, ainsi que M. Coriolis, de ce que, dans certaines circonstances du moins, la dilatation de la veine ne doit pas être brusque, même sans ajutage divergent. Quant à la théorie d'après laquelle MM. Eytelwein, d'Aubuisson et d'autres auteurs ne tiennent pas compte, avec Borda, de la percussion à la sortie de l'étranglement, elle est contraire à cette expérience que j'ai d'ailleurs variée. Or, même en admettant la possibilité de quelque erreur, il n'y a pas à craindre d'en rencontrer d'aussi grandes, surtout quand les résultats sont bien conformes aux saines théories.

VI.

Expériences sur divers phénomènes des ajutages divergents.

On admettait dans tous les ouvrages sur l'hydraulique que le débit des ajutages divergents était le même dans l'eau que dans l'air. Il résulte des expériences suivantes faites en 1841 que cela n'est pas vrai en général.

Dans les limites de ces expériences, quand l'ajutage n'est pas assez ouvert pour que l'on ne puisse point parvenir à le faire couler plein dans l'air au moyen d'obturateurs

partiels présentés quelques instants, il coule plein de lui-même étant plongé dans l'eau. J'attribue principalement cet effet à une cause analogue à celle qui modifie le frottement dans les tuyaux mouillés d'avance, et surtout dans le cas où leurs parois sont déjà en contact depuis un certain temps avec la colonne liquide. Il est même intéressant d'étudier les détails du phénomène, et la manière dont la veine se dilate dans certaines circonstances le long des parois mouillées sans être plongées au-dessous du niveau d'aval, quand les vitesses sont très-petites. On la voit étendre, pour ainsi dire, des ailes de chaque côté de l'ajutage. En définitive, ce genre de phénomènes et celui qui fait l'objet de mon dernier Mémoire se prêtent un mutuel appui. Au reste, le phénomène des tourbillons peut contribuer à expliquer l'application de la veine liquide contre les parois dans les ajutages plongés.

J'ai eu seulement pour but, dans les expériences dont je vais donner une description succincte, d'étudier le phénomène dans ce qu'il a de plus essentiel, en me contentant d'observer des différences très-considérables dans les effets.

Ainsi, n'ayant pas alors de réservoir à niveau constant, j'ai mesuré la profondeur de l'abaissement du niveau pendant une ou deux minutes pour les divers modes d'écoulement, en ayant soin que le temps fût bien rigoureusement le même pour les écoulements qu'il s'agissait de comparer. Le réservoir était un vase en zinc à peu près cylindrique, d'environ $0^m,67$ de haut et de $0^m,24$ de diamètre; le niveau ne baissait jamais d'un tiers de sa hauteur pendant la première minute.

Les quatre ajutages dont je me suis servi successivement étaient des tubes coniques entièrement ouverts à leurs extrémités; leurs petits diamètres étaient de $0^m,011$ à $0^m,012$ environ. Par cette extrémité ils étaient soudés sans *bavures* à la paroi verticale du vase. Leurs axes étaient à peu près perpendiculaires au plan de cette paroi. Ils étaient disposés à $0^m,02$ ou $0^m,03$ au-dessus du fond et à environ $0^m,033$ de distance les uns des autres. Le diamètre extérieur de l'ajutage le plus ouvert était d'environ $0^m,053$, la longueur, c'est-à-dire le côté de cet ajutage étant de $0^m,14$. L'ajutage le moins ouvert avait $0^m,028$ de diamètre extérieur et $0^m,135$ de côté.

Les deux autres avaient $0^m,16$ de côté: le diamètre extérieur de l'un était à peu près moyen entre ces deux premiers; le diamètre extérieur de l'autre était à peu près moyen entre ce dernier et celui de $0^m,028$. On n'en laissait jamais couler qu'un seul pendant chaque expérience.

Les deux ajutages les moins ouverts coulent pleins sans qu'il soit nécessaire de les faire déboucher sous l'eau, mais il faut une hauteur de réservoir suffisante. La colonne liquide entraînant de l'air en vertu de ses mouvements quelconques et de la communication latérale du mouvement des fluides, tend à faire le vide autour d'elle, soit quand elle se détache momentanément de l'ajutage, soit à l'origine même de l'écoulement. En définitive, ces ajutages coulent à peu près complétement pleins sous une charge convenable; des agitations intérieures appliquent périodiquement la veine liquide à la paroi sans jamais l'en détacher bien sensiblement. Pour ces deux ajutages, on ne remarque alors aucune différence dans le débit, quand ils débouchent sous

l'eau ou dans l'air, parce qu'ils coulent à peu près pleins dans les circonstances dont il s'agit. Il est même assez difficile alors de parvenir à les empêcher de couler pleins dans l'air au moment où ils sont débouchés. Pour parvenir à détacher la veine de l'ajutage avec facilité, il a fallu commencer par ne verser d'abord qu'une petite quantité d'eau sur le fond du vase, en augmentant graduellement le volume jusqu'à ce que le vase fût plein. Mais il faut observer, et c'est une des choses qui caractérisent ce mode d'écoulement, que si l'on verse un seau d'eau brusquement dans le cas où l'ajutage employé a $0^m,028$ de diamètre extérieur, le vase étant à moitié plein, la veine qui ne remplissait pas l'ajutage le remplit aussitôt et continue à le faire couler plein pendant que le vase se vide. Or c'est le contraire qui arrive pour l'ajutage de $0^m,033$ environ de diamètre extérieur, qui, après avoir été *amorcé*, cesse de couler plein quand on y verse de la même manière un seau d'eau sur la même hauteur d'eau dans le réservoir. Le mouvement rapide imprimé à la veine quand l'ajutage n'est pas trop ouvert, lui donne une force latérale de succion suffisante pour l'appliquer contre les parois; et si l'ajutage est plus ouvert, de manière qu'on ne puisse l'*amorcer* avec facilité qu'au moyen des phénomènes d'adhérence qui se présentent dans les petites vitesses à l'origine du mouvement, à moins de se servir momentanément de l'intervention d'un corps extérieur, la veine se détache des parois par suite d'une percussion brusque.

J'ai disposé ensuite le vase à une des extrémités d'une baignoire, l'écoulement se faisant du côté de l'extrémité opposée. Pour chaque expérience le volume d'eau écoulé par l'ajutage faisait élever à une petite hauteur le niveau de l'eau autour du vase. Cette hauteur était réglée de manière à pouvoir étudier comment les choses se passaient pendant que l'orifice des ajutages se recouvrait graduellement. J'observais d'abord le mouvement de l'eau avant qu'elle remplît l'ajutage, le niveau extérieur ne s'élevant pas d'abord jusqu'à lui. Au commencement de l'expérience, la veine formait une *nappe* qui se pliait de bas en haut sur une portion plus ou moins grande de la paroi intérieure. Lorsque ensuite le niveau extérieur s'élevait devant la veine, celle-ci formait un remou de plus en plus brusque, sans que l'ajutage coulât plein, jusqu'à ce qu'il fût presque entièrement recouvert. Il en était ainsi, du moins dans le cas où d'abord l'ajutage ne contenait pas encore d'eau à l'époque où il avait été débouché extérieurement, le bouchon pénétrant d'abord jusqu'à son plus petit diamètre. Ces phénomènes dépendent du degré d'inclinaison de l'axe; les personnes qui voudront répéter ces expériences en retrouveront facilement les détails secondaires.

Quand l'ajutage est suffisamment recouvert, le bruit que fait l'air entraîné ou mis en mouvement d'une manière quelconque par le liquide, cesse en grande partie et l'ajutage se remplit brusquement. Le débit augmente d'une quantité considérable, et qui, pour l'un des deux premiers ajutages, est de plus de moitié en sus quand il est tout à fait sous l'eau, dont la hauteur diminue cependant un peu la différence des niveaux d'amont et d'aval.

Quant au troisième ajutage, celui de $0^m,039$ de diamètre extérieur, lorsqu'il était plongé, il débitait plus d'eau que dans l'air. Mais comme je suis parvenu, il est vrai presque par hasard, à le faire couler à peu près plein dans l'air, j'en conclus, en

réunissant ce fait à ceux que j'avais déjà observés sur les autres ajutages, que l'augmentation de débit provenait, dans tous les cas, seulement de ce que les ajutages entièrement plongés présentaient un écoulement parfaitement analogue à ce qui se passait dans l'air quand le liquide adhérait à leurs parois. Je n'ai pu, en effet, observer d'augmentation de débit bien sensible, par suite de la submersion, pour l'ajutage le plus ouvert. Or c'était précisément le seul que je n'avais pu faire couler plein dans l'air, sous des charges d'eau un peu fortes, analogues à celles pour lesquelles je mesurais le débit.

Dans les deux ajutages les plus ouverts la veine se détachait plus ou moins de la partie supérieure de la paroi quand l'écoulement se faisait à l'air libre. On observe si les charges d'eau ne sont plus que de $0^m,10$ à $0^m,20$ qu'elle laisse échapper de chaque côté une nappe très-mince qui lèche la paroi conique intérieure. C'est le long de cette nappe que, dans les petites vitesses, la veine vient graduellement s'étendre, et finit par remplir graduellement l'origine de l'ajutage, si l'extrémité extérieure de celui-ci n'est pas trop inclinée, quand les vitesses sont très-diminuées par suite de la baisse de l'eau dans le vase.

L'aspect de la veine n'est pas le même dans ces deux derniers ajutages avant l'époque où elle est ainsi plus ou moins relevée. Dans l'un et dans l'autre, lorsque le vase est plein, on ne voit point de partie lumineuse à l'intérieur de l'ajutage, du moins à l'œil nu; mais on en voit une bien distincte quand l'eau est baissée d'une petite quantité en regardant par l'extrémité la plus large. Dans l'ajutage le plus ouvert, on voit, au bout d'un certain temps, cinq anneaux lumineux précédés par la partie de la veine qui sort avec sa couleur ordinaire. Le deuxième et le quatrième anneau sont très-brillants. On suit facilement de l'œil les mouvements intérieurs du liquide, d'où il résulte des pertes de force vive quelconques. Quand la partie extérieure de l'ajutage est convenablement relevée, son origine étant remplie d'eau dans les petites vitesses, la partie brillante de la veine n'apparaît plus que comme un ovale dont le grand axe est horizontal, et l'on y voit encore des mouvements intérieurs en spirale, longtemps après la cessation de l'écoulement.

Maintenant il faut se demander pourquoi le débit de l'ajutage le plus ouvert n'augmente pas quand il coule plein sous l'eau, car il est bien positif qu'il y a une époque où il coule véritablement plein, comme on s'en assure même avant qu'il soit en entier recouvert. Il y a un instant où le bruit de l'air en mouvement aux environs du remous cesse presque totalement, même pour un ajutage de cet angle. On voit alors la veine s'appliquer brusquement contre l'origine de l'ajutage, et sortir avec beaucoup plus de régularité, sans produire un remous relevé aussi brusquement, bien que la partie extérieure soit encore loin d'être recouverte. Au même instant on cesse de voir la partie brillante de la veine.

Ce que j'ai dit dans le § I sur la dilatation des veines liquides au milieu des tourbillons, jette beaucoup de jour sur la manière dont le degré d'ouverture de l'angle d'un ajutage contribue à la perte de force vive. Nous avons vu, en effet, qu'il y a même un angle au delà duquel l'ajutage peut devenir plus nuisible qu'utile. Ces tourbillons se

présentent aussi plus ou moins dans le mouvement des gaz. Quand on observe le mouvement de l'air comprimé dans un tuyau par une colonne liquide, comme je l'ai expliqué dans mon dernier Mémoire, à la sortie du tuyau la colonne fluide est cylindrique; on le voit par le mouvement des poussières chassées de ses parois, mais elle se termine bientôt en cône d'une forme analogue à celle d'une sorte de flamme.

Ces ajutages, objet spécial de ce paragraphe, étaient de trop petites dimensions pour que l'on pût en déduire des règles sur l'angle convenable à de plus grands ajutages. Mais, par cette raison même, ils établissent la limite de l'angle qu'on ne peut espérer atteindre dans les applications, à cause des phénomènes de l'adhérence relativement plus puissants pour ces petits diamètres.

Quelque grand que soit un cours d'eau, il y a toujours un angle pour lequel la divergence se fait sans tourbillons. Un arc d'environ 30 degrés remplit cette condition pour les vitesses ordinaires de l'eau dans la Seine en aval des murs verticaux auxquels cet arc est tangent. En amont des courbures analogues, il se présente un ensemble d'ondes et de tourbillons intéressants qui, pour certaines vitesses, rejettent à une certaine distance des murs verticaux l'eau affluente. De sorte que la jetée est recouverte en amont d'une ondulation dont l'aspect général ressemble plutôt à une ceinture horizontale qu'à une proue liquide.

Pour le mouvement oscillatoire de l'eau dans les ajutages divergents, les choses ne peuvent pas se passer de la même manière que ci-dessus, puisqu'il faut nécessairement un certain temps et un certain chemin parcouru avant la formation des tourbillons aussi caractérisés qu'ils le sont dans les mouvements uniformes ou du moins d'une certaine durée. J'ai rapporté, dans le tome XII de ce Journal, page 375, des expériences sur un ajutage divergent de grandes dimensions, dont l'effet n'était pas assez sensible pour être observé dans des circonstances où il semblait résulter des expériences de M. Eytelwein, sur le mouvement uniforme, que cependant cet effet devait être notable. Il paraît donc, conformément à l'idée qu'on peut se former du mode de production des tourbillons, que si la longueur de la colonne liquide déchargée par un tuyau de conduite, en partie plongé dans un réservoir, est assez petite par rapport à son diamètre, la veine liquide prend d'elle-même, à sa sortie du tuyau dans le réservoir, la forme la plus convenable pour le dégagement alternatif de l'eau. Il en résulte une conséquence importante pour les machines hydrauliques à mouvement variable, c'est qu'on n'est pas obligé de donner à leurs bouches de sortie un diamètre, en général, aussi grand qu'à celles des machines hydrauliques à mouvement sensiblement uniforme.

Daniel Bernoulli a fait des expériences sur la durée des oscillations de l'eau dans des tuyaux coniques verticaux en partie plongés dans un réservoir à niveau constant. Mais il ne connaissait pas l'utilité que ce genre d'expériences pouvait avoir pour étudier l'angle le plus favorable à l'écoulement des ajutages divergents. Or il est intéressant de déterminer l'angle pour lequel l'ajutage cesse de couler plein quand il a de grandes dimensions, c'est-à-dire l'angle pour lequel il ne faut plus du tout compter sur un phénomène analogue à celui du parallélisme des tranches. Pour cela, il suffit de donner à un tuyau conique vertical en partie plongé dans un réservoir, quelques mou-

vements de va-et-vient dans le sens de l'axe, de façon à mettre la colonne liquide en oscillation. On voit ainsi quel est l'angle pour lequel les durées calculées diffèrent peu des durées véritables. Au delà de cet angle de convergence les durées ne diminuent plus, à beaucoup près, autant que l'indique le calcul, le plus grand diamètre étant inférieur.

Il faut tenir compte de ce que, dans ce mouvement oscillatoire, il ne doit pas y avoir autant de tourbillons que dans le mouvement permanent où ils ont le temps de se former d'une manière plus complète. Par conséquent, l'angle déterminé de cette manière doit être un peu trop ouvert. Un tuyau de zinc de $1^{m},16$ de long, de $0^{m},135$ de diamètre supérieur et de $0^{m},25$ de diamètre inférieur, paraissait être dans les conditions dont il s'agit. Le diamètre supérieur étant réduit à $0^{m},005$, l'angle était trop ouvert.

On peut remarquer, à cette occasion, qu'un cône qui s'émerge, en partie, périodiquement au moyen d'une force qui le tire de bas en haut, n'est pas aussi délicat à manœuvrer régulièrement qu'on pourrait le croire. Il est même assez facile de saisir le genre de mouvement nécessaire pour en faire, au besoin, une sorte de machine à élever de l'eau, sans soupape, à cause du vide conique annulaire qui, tendant à se former périodiquement, est la cause d'une oscillation ascendante. On sentait bien distinctement, en manœuvrant les cônes précédents avec la main, que l'effort de la puissance s'exerçait principalement pendant le soulèvement, et non pendant l'abaissement, comme cela aurait eu lieu dans une *canne hydraulique*.

En général, quand une colonne liquide oscille dans un tuyau portant un entonnoir à son extrémité inférieure plongée dans un réservoir, il faut compter, si l'évasement n'est pas très-graduellement fait, que la principale perte de force vive a lieu lorsque la colonne liquide redescend, tandis qu'elle est bien moindre dans l'autre sens du mouvement oscillatoire. J'ai eu depuis longtemps occasion de le remarquer en étudiant, par expérience, les mouvements de cette espèce dans les tuyaux fixes.

Résumé et conclusions.

Les tourbillons des veines liquides dans les ajutages divergents et dans diverses circonstances, changent les résultats définitifs de certains phénomènes d'une manière qui n'avait pas encore été signalée. Ainsi, par exemple, la fameuse loi romaine qui défendait d'élargir la bouche de sortie des tuyaux de conduite d'une longueur moindre que que 50 pieds pouvait, dans certains cas, être à l'avantage du concessionnaire.

Au moyen de ces expériences, je détermine les conditions que doivent remplir, dans diverses circonstances, les tuyaux ou canaux coudés pour être utilisés avec avantage. Je montre ensuite en quoi consistent les effets des barrages noyés, qui n'avaient pas été signalés avant l'époque où je les ai communiqués à la Société Philomathique.

Dans les courants d'eau les mieux arrivés à la permanence, je remarque des oscillations d'une espèce nouvelle que je reproduis à volonté en les amplifiant. De plus, je

montre qu'il suffit de disposer d'une certaine manière l'orifice d'un jet d'eau, au moyen d'obturateurs partiels fixes, pour faire, dans certains cas, cesser et renaître indéfiniment ce jet comme par un mouvement régulier de respiration. J'appelle sur ce genre nouveau de phénomènes l'attention des fontainiers qui, avec le temps, y trouveront sans doute un moyen d'inspecter l'état intérieur de leurs tuyaux de conduite, au moyen des vibrations des jets d'eau.

J'examine ensuite, par expérience, les idées de divers auteurs sur la manière d'estimer la perte de force vive occasionnée par les rétrécissements à l'intérieur des conduites, ainsi que mes propres idées sur cette matière, et je montre dans quelles limites celles que j'ai émises sont applicables.

On admettait généralement que les ajutages divergents débitaient autant d'eau en débouchant dans l'air que lorsqu'ils étaient plongés. Je montre dans quelles circonstances cela n'est pas exact, et, en étudiant les détails du phénomène, je fais voir comment les nappes liquides se comportent dans diverses circonstances. Je remarque la différence qui existe entre l'effet des ajutages divergents dans le mouvement permanent et dans le mouvement oscillatoire, par suite de la manière dont se forment les tourbillons latéraux.

En définitive, cette Note, qui ne peut être appréciée que par ses détails, modifie d'une manière essentielle les idées reçues depuis longtemps sur des phénomènes usuels, qu'il était intéressant de mieux connaître pour leurs applications à l'industrie, à l'explication des fontaines naturelles et à l'étude des lois de l'exhaussement des rivières.

MÉMOIRE

Sur la géométrie de courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

1. Je me propose, dans ce Mémoire, de discuter avec quelques développements la théorie de lignes tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Je prendrai pour mon point de départ l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic de la surface; mais, en premier lieu, il faut que j'aie soin d'avertir d'une erreur qui m'est échappée dans le Mémoire que j'ai inséré au cahier de janvier 1848 de ce Journal. Cette erreur (qui m'a été indiquée par les recherches de M. Hart sur les lignes géodésiques, publiées dans le n° XIX du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*) consiste à négliger une quantité constante qui entre dans l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic, quand on cherche à exprimer (comme je l'ai fait) la constante arbitraire, entrant dans l'équation de M. Jacobi, en fonction de l'angle que la ligne géodésique forme avec la section principale de la surface qui contient les ombilics. En effet, par suite d'idées inexactes par rapport à la symétrie de la surface, j'avais pensé que, si deux lignes géodésiques forment entre elles à un ombilic un certain angle, elles se rencontreront encore sous le même angle à l'ombilic opposé; tandis qu'une analyse plus précise prouve que ces angles sont essentiellement inégaux [*].

[*] Il faut observer que les résultats contenus dans ma Lettre adressée à M. Liouville et insérée à la page 491 du tome XII de ce Journal, sont tous inexacts. Nous verrons dans ce qui suit les vrais théorèmes qui doivent remplacer ceux qui se trouvent dans la Lettre à laquelle je fais allusion.

2. Je vais présenter maintenant l'équation corrigée de la ligne géodésique, et, pour cela, je me servirai d'une méthode qui m'a été communiquée par M. Liouville.

En conservant les notations de mon Mémoire (tome XIII, page 1), nous avons pour l'équation de toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic

$$(1) \qquad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2} \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \alpha;$$

d'une ligne à l'autre il n'y a de différence que par la valeur qu'on assigne à la quantité constante α, et il s'agit de déterminer cette valeur en fonction de l'angle ω qu'une ligne géodésique particulière quelconque forme avec la section ombilicale de la surface.

On doit faire ici une observation utile par rapport à l'emploi du double signe qui se trouve dans l'équation (1). Voici en quoi elle consiste. Si ρ désigne la longueur de l'arc géodésique compté de l'ombilic jusqu'au point (μ, ν), on a

$$\rho = \int_0^\mu \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\, d\mu \mp \int_0^\nu \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\, d\nu.$$

Le signe positif, dans cette équation, doit être employé avec le signe négatif dans l'équation (1), et *vice versâ* [*].

Maintenant, pour fixer les idées, nous supposerons que les ombilics contigus O, O' sont les foyers intérieurs des lignes de courbure pour lesquelles on a

$$\mu = \text{constante}.$$

L'angle ω est la limite vers laquelle tend l'angle θ compris entre l'arc géodésique O'T et le prolongement de OT, lorsque le point T ou (μ, ν) se rapproche indéfiniment du point O, c'est-à-dire lorsque $\mu - b$ et $b - \nu$ convergent vers zéro. Or la tangente à la ligne de courbure (μ) partage l'angle θ en deux parties égales; l'angle θ est donc le double

[*] Il est bon d'observer que nous nous bornons à la considération du demi-ellipsoïde terminé par le plan de l'axe le plus grand et de l'axe moyen.

de l'angle i contenu dans l'équation de M. Liouville,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2,$$

qui appartient à la ligne géodésique dont il s'agit. Ainsi

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang}^2 i = \frac{\mu^2 - b^2}{b^2 - \nu^2} = \frac{\mu - b}{b - \nu} \cdot \frac{\mu + b}{b + \nu},$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} = \lim \frac{\mu - b}{b - \nu}.$$

Maintenant, pour la détermination de la quantité α, qui se trouve dans l'équation (1), en fonction de l'angle ω, j'observe que le premier membre de cette équation est la somme des deux quantités suivantes :

$$(p) \qquad \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \right)$$

et

$$(q) \quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \right) \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \right),$$

dont la première (p), revient à

$$\frac{1}{2b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\log \frac{\mu - b \,.\, b + \nu}{b - \nu \,.\, \mu + b} - \log \frac{c - b}{c + b} \right),$$

en adoptant le signe supérieur. En faisant converger μ et ν vers la valeur commune b qu'elles prennent au point O, nous trouverons à la limite cette valeur de la quantité (p),

$$\frac{1}{2b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\log \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} - \log \frac{c - b}{c + b} \right).$$

Quant à la quantité (q), elle prendra alors une valeur finie et déterminée, et il est facile de voir que l'équation de la ligne géodésique s'écrit finalement de la manière suivante :

$$(2) \quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \log \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} - \mathrm{B},$$

où B est une constante absolue, savoir,

$$B = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\frac{c-b}{c+b} + \int_b^c \frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\left(\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\right)$$
$$\mp \int_0^b \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\left(\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\right).$$

3. L'équation que nous venons de trouver peut se transformer assez élégamment en y introduisant les fonctions H, Θ signalées par M. Jacobi. Pour cela, nous poserons dans l'équation (2),

$$a=1,\quad b=c\sin\lambda,\quad \mu=c\sin\varphi,\quad \nu=c\sin\psi,\quad \sqrt{1-c^2\sin^2\lambda}=\Delta(c,\lambda),$$

et ainsi pour les angles φ et ψ; et, en effectuant ces substitutions, cette équation deviendra

$$\int_\pi^\varphi \frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin^2\varphi-\sin^2\lambda}\,d\varphi - \int_0^\psi \frac{\Delta(c,\psi)}{\sin^2\lambda-\sin^2\psi}\,d\psi = \frac{\Delta(c,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} - c^2 B,$$

en adoptant ici pour la seconde intégrale le signe négatif, d'où résultera le signe positif dans l'expression du rayon vecteur. La réduction des intégrales que renferme cette dernière équation aux formes fondamentales des fonctions elliptiques s'effectue par les formules données par Legendre (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome Ier, pages 70 et 71), et, conformément à la notation connue, notre équation devient

$$\operatorname{cotang}\lambda\,\Delta(c,\lambda)\left[\Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, \varphi) + \Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, \psi)\right]$$
$$-\frac{\operatorname{cotang}\lambda}{\Delta(c,\lambda)}\left[F(c,\varphi) + F(c,\psi)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\,\frac{[\Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\lambda][\Delta(c,\psi)\operatorname{tang}\lambda + \Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\psi]}{[\Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\varphi - \Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\lambda][\Delta(c,\psi)\operatorname{tang}\lambda - \Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\psi]}.$$

Faisons maintenant

$$F(c) = K,\quad F(c,\varphi) = \frac{2Ku}{\pi},\quad F(c,\psi) = \frac{2Kv}{\pi},\quad F(c,\lambda) = \frac{2Kl}{\pi},$$

et les formules qui se trouvent à la page 139 du tome III du *Traité des Fonctions elliptiques*, donnent

$$\operatorname{cotang}\lambda\,\Delta(c,\lambda)\,\Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, \varphi) - \frac{\operatorname{cotang}\lambda}{\Delta(c,\lambda)}F(c,\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-l)}{\Theta(u+l)} - \frac{2Ku}{\pi}\left[\frac{c^2\sin\lambda\cos\lambda}{\Delta(c,\lambda)} + \frac{E(c)}{F(c)}F(c,\lambda) - E(c,\lambda)\right].$$

Mais on a aussi

$$\frac{2K}{\pi}\left[\frac{c^2 \sin\lambda \cos\lambda}{\Delta(c, \lambda)} + \frac{E(c)}{F(c)} F(c, \lambda) - E(c, \lambda)\right] = -\frac{\Theta'(l + \frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l + \frac{1}{2}\pi)},$$

en désignant par Θ' la dérivée de Θ par rapport à l'argument l (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 128); en sorte que l'équation de la ligne géodésique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\log \frac{\Theta(u-l)\,\Theta(l-v)}{\Theta(u+l)\,\Theta(l+v)} + 2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(u+v)$$

$$= \log \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(u+l) \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(l+v)}{\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(u-l) \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(l-v)},$$

d'où, en se rappelant la relation entre les fonctions H, Θ, savoir,

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Ku}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

l'équation (2) se trouve transformée en la suivante :

$$\frac{H(u-l)\,H(l-v)}{H(u+l)\,H(l+v)} = \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}\, e^{-2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(u+v)}.$$

4. Si v_1 est la valeur de v qui répond à $u = \frac{1}{2}\pi$, la dernière équation donne

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} = \frac{H(l-v_1)}{H(l+v_1)}\, e^{2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(\frac{1}{2}\pi + v_1)},$$

et si l'on désigne par ω_1 l'angle (mesuré vers la section qui contient l'axe moyen et l'axe le plus petit) que l'arc géodésique compris entre le point $(\frac{1}{2}\pi, v_1)$ et l'ombilic opposé forme avec la section ombilicale, on a évidemment

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega_1}{2} = \frac{H(l+v_1)}{H(l-v_1)}\, e^{2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(\frac{1}{2}\pi - v_1)},$$

en sorte que

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega_1}{2} = e^{\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}.$$

On conclut de là que, si une ligne géodésique issue d'un ombilic O est prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le même point O une seconde fois, alors sa direction ω' ne coïncide pas avec sa direction initiale ω, et l'on a, entre ω et ω', la relation suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2} = e^{-2\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

Ce théorème se trouve déjà démontré par M. Hart (*voir* le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* n° XIX, pages 83 et 84).

Si l'on désigne par Ω l'angle que la ligne géodésique, qui passe par le sommet de l'axe moyen de la surface, forme avec la section des ombilics, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2} = e^{\frac{1}{2}\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}.$$

5. Quand un cône de révolution est circonscrit à un ellipsoïde, on sait que son sommet se trouve sur l'hyperbole focale de la surface. Or M. Chasles a démontré que l'arc géodésique mené d'un point T de la courbe de contact à l'ombilic O situé sur la branche de l'hyperbole focale à qui appartient le sommet du cône, et l'arête du cône comprise entre son sommet S et le point de contact, ont leur différence constante. Il suit de là que toutes les courbes de contact dont il s'agit ont pour équation différentielle

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = 0,$$

et, en posant (comme on l'a déjà fait)

$$\mu = c\sin\varphi,\quad \nu = c\sin\psi,$$

puis intégrant par des fonctions elliptiques, on trouve

$$F\left(\frac{c}{a},\varphi\right) \pm F\left(\frac{c}{a},\psi\right) = F\left(\frac{c}{a},\sigma\right),$$

σ étant une quantité constante pour chaque courbe de contact.

Je vais démontrer que si l'on représente par α l'angle du cône de

révolution correspondant, on a

$$\operatorname{tang}\sigma \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Pour établir cette proposition, nous poserons TS $= t$, l'arc géodésique OT $= \rho$, et en désignant par y la distance du point T au plan qui contient les ombilics, nous trouverons d'abord

$$(3) \qquad t = y \cdot \frac{d\rho}{dy},$$

où $d\rho$ est l'élément de la ligne géodésique OT, et dy le changement correspondant infiniment petit dans la quantité y.

Maintenant, on a

$$y = \frac{1}{b}\,\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

d'où, en différentiant,

$$dy = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\left[\frac{(b^2-\nu^2)\mu\, d\mu - (\mu^2-b^2)\nu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}\right].$$

Mais on a aussi

$$d\rho = \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\, d\mu \pm \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\, d\nu,$$

et simultanément

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \mp \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0.$$

L'équation (3) fournit donc pour t la valeur suivante :

$$t = \frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}\left[\mu\sqrt{(c^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)} \pm \nu\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\mu^2)}\right]}{a^2c^2 - a^2(\mu^2+\nu^2) + \mu^2\nu^2}.$$

Or les formules pour l'addition ou la soustraction des fonctions elliptiques donnent

$$\frac{\operatorname{tang}\sigma}{a} = \frac{\mu\sqrt{(c^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)} \pm \nu\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\mu^2)}}{a^2c^2 - a^2(\mu^2+\nu^2) + \mu^2\nu^2}.$$

Il s'ensuit que

$$(4) \qquad t = \frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}\operatorname{tang}\sigma}{a}.$$

A présent, soit p la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en T : on sait que

$$p = \frac{a\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}};$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{pt}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}.$$

Or la normale à la surface en T va rencontrer le plan des ombilics en un point F qui appartient à la tangente de l'hyperbole focale en un point S, d'où, en posant TF $= n$, nous avons

$$t\operatorname{tang}\alpha = n.$$

Mais on a aussi

$$np = a^2 - b^2,$$

et de là résulte enfin, à cause de la valeur de tang σ que nous venons de trouver,

$$\operatorname{tang}\sigma\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \tag{5}$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. Nous allons maintenant exprimer la différence entre les quantités t et ρ en fonction de l'angle α. Pour cela, l'équation (4) donne, en y introduisant les angles φ et ψ au lieu des quantités μ et ν, et en adoptant la notation des fonctions elliptiques,

$$t = a\Delta\left(\frac{c}{a}, \varphi\right)\Delta\left(\frac{c}{a}, \psi\right)\operatorname{tang}\sigma,$$

et l'on a aussi

$$\rho = a\left[\mathrm{E}\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) \pm \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\right].$$

Or la formule fondamentale pour l'addition des fonctions elliptiques peut s'écrire de la manière suivante :

$$\Delta\left(\frac{c}{a}, \varphi\right)\Delta\left(\frac{c}{a}, \psi\right) = \Delta\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) \pm \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma \text{ [*]}, \tag{6}$$

[*] *Voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 196.

en sorte que nous avons

$$t - \rho = a\left[\operatorname{tang}\sigma\Delta\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) - \mathrm{E}\left(\frac{c}{a}, \sigma\right)\right].$$

d'où, en vertu de l'équation (5), nous tirons

$$(7) \qquad t - \rho = (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{cos\acute{e}c}^2 \alpha \, d\alpha}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(a^2 - c^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)}}.$$

7. Remarquons maintenant, d'après M. Chasles, que si nous prolongeons une tangente à la ligne géodésique en un point quelconque T jusqu'à ce qu'elle aille percer le plan des ombilics au point S, ce point se trouve sur l'hyperbole focale de la surface; en sorte que l'angle α est l'angle entre la droite TS et la tangente à l'hyperbole focale au point S. Nous nous proposons de trouver la relation qui existe entre l'angle α et l'inclinaison θ du plan osculateur de la ligne géodésique au point T sur le plan qui contient les ombilics. Pour cela, soit T' le point infiniment voisin de T sur la ligne géodésique OT, et supposons que sa tangente en ce point perce l'hyperbole focale au point S' consécutif à S; on a donc

$$(\mathrm{T'S'} - \text{l'arc géodésique OT'}) - (\mathrm{TS} - \text{l'arc géodésique OT}) = d(t - \rho),$$

d'où, si $\delta\varepsilon$ est l'angle infiniment petit entre T'S' et TS,

$$d(t - \rho) = \frac{t\,\delta\varepsilon}{\operatorname{tang}\alpha};$$

et, si γ est le rayon de courbure de la ligne géodésique correspondant à l'élément $d\rho$, on a

$$d\rho = \gamma\,\delta\varepsilon,$$

en sorte que nous tirons

$$(8) \qquad d(t - \rho) = \frac{t\,d\rho}{\gamma \operatorname{tang}\alpha}:$$

d'où, en vertu de l'équation (7), nous déduisons la relation suivante entre les changements correspondants infiniment petits dans les quantités α et ρ le long de la même ligne géodésique

$$(9) \qquad \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\gamma}{t \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{\mathrm{R}}},$$

en posant

$$\mathrm{R} = (a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(\overline{a^2 - c^2} \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2).$$

D'après notre définition de l'angle θ, nous avons

$$\sin \theta = \frac{y}{t \sin \alpha},$$

d'où, en différentiant, nous tirons facilement

$$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tang} \alpha \left(1 - \frac{dt}{d\rho}\right) \frac{d\rho}{d\alpha} - t}{t \operatorname{tang} \alpha},$$

ou bien, en vertu des équations (8) et (9),

$$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{t \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\mathrm{R}} - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{t \sin^2 \alpha \sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Mais on a fait voir, n° 5, que

(10) $$pt \operatorname{tang} \alpha = a^2 - b^2;$$

cela donne

(11) $$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \sqrt{\mathrm{R}} - p \sqrt{a^2 - b^2}}{\sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Maintenant, on peut démontrer, avec un peu de calcul, qu'on a l'équation suivante :

$$\cos^2 \alpha \sqrt{\mathrm{R}} - p \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{b \sqrt{c^2 - b^2} \sin \alpha \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - p^2 y^2}}{a^2 - b^2} \text{ [*]}.$$

et il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \alpha - p^2 y^2}}{(a^2 - b^2) \cos \alpha},$$

[*] En effet, si l'on substitue dans cette équation pour p et y leurs expressions en coordonnées elliptiques, et pour $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ leurs valeurs tirées de l'équation (5), elle sera tronvera transformée en

$$2a \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \sigma} \sqrt{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}$$
$$- [a^2(a^2 - c^2) + (a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)] \sin^2 \sigma = a^2 (2a^2 - \mu^2 - \nu^2) \cos^2 \sigma,$$

qu'on peut facilement rendre identique avec l'équation (6).

en sorte que l'équation (11) se trouve transformée en

$$\frac{d\theta}{\sin\theta\, d\alpha} = -\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{R}} \text{ [*]},$$

équation qui s'intègre immédiatement, puisque les variables y sont séparées; et, attendu que ω est la valeur de θ qui répond à $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, on tire

$$(12) \qquad \frac{\tang\frac{\theta}{2}}{\tang\frac{\omega}{2}} = e^{b\sqrt{c^2-b^2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2\tang^2\alpha + a^2 - b^2)(\overline{a^2-c^2}\tang^2\alpha + a^2 - b^2)}}}.$$

Voilà donc la belle forme sous laquelle l'équation de la ligne géodésique qui passe par un ombilic d'un ellipsoïde a été mise par M. Hart (*voir* le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, page 83). Il l'a obtenue par des considérations différentes de celles que je viens d'employer.

8. La marche que nous venons de suivre sert à démontrer une propriété des lignes de courbure de l'ellipsoïde que j'ai déjà trouvée dans mon Mémoire inséré dans le cahier de janvier 1848 de ce Journal, savoir, que si le point T est situé sur une ligne de courbure dont les foyers intérieurs sont les ombilics O, O', on a

$$\tang\frac{\mathrm{TOO'}}{2}\tang\frac{\mathrm{TO'O}}{2} = \text{constante},$$

où l'on suppose que les angles sont formés sur la surface par les lignes géodésiques. La démonstration de ce théorème est fondée sur une propriété de la fonction que j'ai nommée P et qui figure dans la formule pour la rectification des courbes ellipsoïdales, savoir,

$$ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2.$$

La propriété dont il s'agit a été signalée par M. Gauss, et se trouve citée par M. Liouville à la page 304 du tome XII de ce Journal. Elle s'exprime par l'équation suivante :

$$(13) \qquad \frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0,$$

[*] Il faut prendre le radical avec le signe négatif dans cette équation, parce que nous supposons que l'angle θ va croître à mesure que l'angle α diminue.

en se rappelant que M. Liouville désigne par $\sqrt{G}$ notre fonction P et par u et v les quantités que nous nommons ρ et ω; R, R′ sont les rayons de courbure principaux de la surface au point (ρ, ω).

Maintenant, l'équation (8) donne

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{t}{\gamma \tang \alpha},$$

et si D est le demi-diamètre de la surface parallèle à l'élément $d\rho$ de la ligne géodésique, on a

$$\gamma p = D^2,$$

et aussi, en vertu du théorème de M. Joachimsthal,

$$pD = a\sqrt{a^2 - c^2};$$

en sorte que nous tirons

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{p^3 t}{a^2(a^2 - c^2)\tang \alpha}.$$

Or cette dernière équation devient, par l'équation (10),

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{p^4 t^2}{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

ou bien, puisque

$$RR' = \frac{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{p^4},$$

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{t^2}{RR'};$$

d'où, si l'on substitue dans cette dernière pour t sa valeur tirée de l'équation (3), nous avons

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{y}{RR'} = 0.$$

Maintenant, si l'on compare cette équation avec l'équation (13), on déduit que

$$P = y\varphi(\omega),$$

et puisque, dans le voisinage d'un ombilic, la surface s'assimile à une

sphère, on voit sans difficulté que

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sin\omega},$$

en sorte que

$$P = \frac{y}{\sin\omega};$$

ce qui s'accorde bien avec l'expression que nous avons déjà trouvée [*].

Mais si P', ω' sont les quantités correspondantes avec P et ω pour l'ombilic contigu, on a, le long de la même ligne de courbure,

$$P\,d\omega + P'\,d\omega' = 0,$$

ou

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} + \frac{d\omega'}{\sin\omega'} = 0,$$

formule qui contient la démonstration cherchée [**].

9. Nous allons maintenant transformer l'équation (12) en y introduisant la fonction Θ et sa dérivée. Pour cela, nous poserons

$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{tang}\alpha,$$

et cette substitution transforme la quantité

$$b\sqrt{c^2 - b^2}\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2\operatorname{tang}^2\alpha + a^2 - b^2)(a^2 - c^2\operatorname{tang}^2\alpha + a^2 - b^2)}},$$

en la suivante :

$$\frac{a^2\sqrt{c^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\int_{l_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dl_1}{\sqrt{a^2 - c^2\sin^2 l_1}} - \int_{l_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2\sin^2 l_1}\,\frac{dl_1}{\sqrt{a^2 - c^2\sin^2 l_1}}\right),$$

ce qui devient, en adoptant la notation que nous avons employée au n° 5,

$$\frac{\operatorname{cotang}\lambda}{\Delta(c,\lambda)}\left[F(c) - F(c, l_1)\right]$$
$$- \operatorname{cotang}\lambda\,\Delta(c,\lambda)\left[\Pi(-c^2\sin^2\lambda, c) - \Pi(-c^2\sin^2\lambda, c, l_1)\right].$$

---

[*] *Voir* le tome XIII de ce Journal, page 8.

[**] J'ai déjà publié cette démonstration dans le n° XVI du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, page 159.

Maintenant, en posant

$$F(c, l_1) = \frac{2Kw}{\pi},$$

et en introduisant la fonction Θ et sa dérivée, cette dernière expression s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(w-l)}{\Theta(w+l)} - \frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}\left(\frac{\pi}{2} - w\right),$$

en sorte que l'équation (12) se trouve transformée en

$$(14) \qquad \frac{\tang^2\frac{\theta}{2}}{\tang^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\Theta(w+l)}{\Theta(w-l)}\, e^{-2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}\left(\frac{\pi}{2}-w\right)}.$$

10. La formule (14), que nous venons de trouver, sert à déterminer la valeur de notre fonction P, quand l'arc géodésique auquel elle appartient coïncide avec la section principale qui contient les ombilics. En effet, il n'est pas difficile de voir qu'on a pour P l'expression suivante :

$$P = \frac{t \sin\alpha \sin\theta}{\sin\omega}.$$

Mais l'équation (14) donne

$$\sin\theta = \frac{\varkappa \sin\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \varkappa^2 \sin^2\frac{\omega}{2}},$$

où $\varkappa$ est une fonction de l'angle α; en sorte qu'on en déduit pour P la valeur générale

$$P = \frac{\varkappa t \sin\alpha}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \varkappa^2 \sin^2\frac{\omega}{2}},$$

ce qui donne, pour $\omega = 0$,

$$P = \varkappa t \sin\alpha,$$

et pour $\omega = \pi$,

$$P = \frac{t \sin\alpha}{\varkappa}.$$

11. Considérons maintenant l'équation d'une ligne géodésique

quelconque sur l'ellipsoïde, savoir,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mu^2 + \nu^2 \operatorname{tang}^2 i = \beta(1 + \operatorname{tang}^2 i).$$

Il est évident qu'on peut satisfaire à cette équation en posant $\mu = \nu$, ce qui donne

$$\mu = b, \quad \nu = b,$$

et, en même temps,

$$\operatorname{tang} i = \pm\sqrt{-1};$$

et, attendu que ces valeurs ne dépendent pas de β, on peut dire que toutes les lignes de courbure sur l'ellipsoïde sont inscrites dans un même quadrilatère géodésique, dont les côtés sont imaginaires, mais qui a deux sommets opposés réels, savoir, deux ombilics contigus. Les directions de ces côtés sont indiquées par un facteur imaginaire qui se présente dans l'équation différentielle des lignes de courbure sur l'ellipsoïde [*].

Il est presque superflu d'observer qu'une propriété analogue a été connue depuis longtemps pour un système de coniques homofocales.

12. Je vais maintenant présenter un théorème qui sert à déterminer assez simplement la projection des courbes ellipsoïdales sur un plan. En voici l'énoncé :

« Une courbe quelconque, tracée sur un ellipsoïde (dont les demi-
» axes sont a, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$) et ayant pour équation en coor-
» données elliptiques

$$F(\mu, \nu) = 0,$$

» se projette sur les plans des sections circulaires par des droites pa-
» rallèles à l'axe le plus petit de la surface en une courbe dont

[*] *Voir l'Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, par M. C.-F.-A. Leroy, pages 302, 309.

» l'équation est

$$F\left(\mu_0\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}},\ \nu_0\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\right)=0,$$

» où μ_0, ν_0 sont les demi-axes focaux de l'ellipse et de l'hyperbole » qui passent par la projection du point (μ, ν) et qui ont pour foyers » les projections des ombilics. »

Pour démontrer ce théorème, soit l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1,$$

et l'équation de la projection sur le plan des x, y de ses lignes de courbure pour lesquelles $\mu=$ constante, est

$$\frac{c^2x^2}{a^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1.$$

Maintenant, posons

$$x=\xi\cos\zeta,\quad y=\eta,$$

où ζ est l'inclinaison du plan qui coupe la surface suivant un cercle sur le plan des x, y; et, en effectuant ces substitutions dans la dernière équation, nous tirons, eu égard à la valeur connue de $\cos\zeta$,

$$\frac{\xi^2}{\mu^2}+\frac{\eta^2}{\mu^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}. \tag{15}$$

Donc il est évident que les lignes de courbure pour lesquelles $\mu=$ constante se projettent de la manière dont il s'agit en ellipses ayant pour équation en coordonnées rectangulaires (ξ, η) l'équation (15); et les projections semblables des lignes de courbure, $\nu=$ constante, sont les hyperboles représentées par l'équation

$$\frac{\xi^2}{\nu^2}-\frac{\eta^2}{b^2-\nu^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}. \tag{16}$$

Or les équations (15) et (16) représentent un système de coniques homofocales, ayant pour foyers les projections des ombilics; et l'on a, pour le système correspondant de coordonnées elliptiques (μ_0, ν_0)

[d'après lequel les points du plan des ξ, η sont déterminés par la rencontre de la série d'ellipses et d'hyperboles (15) et (16)],

$$\mu_0 = \mu\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}, \quad \nu_0 = \nu\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}.$$

Ces expressions contiennent la démonstration du théorème énoncé.

Les deux exemples les plus élégants que ce théorème fournisse ont été donnés pour la première fois par feu Mac Cullagh et se trouvent cités à la page 4 du tome XI de ce Journal.

13. Il est évident que, si deux lignes géodésiques sont menées sur l'ellipsoïde tangentiellement à une ligne de courbure donnée, et de manière que l'angle sous lequel elles s'entrecoupent soit constant, le lieu de leur intersection a pour équation en coordonnées elliptiques

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

où $2i$ est l'angle constant [*].

Par conséquent, cette courbe se projette sur les sections circulaires en une courbe, lieu d'un point tel, que si de là on mène deux tangentes à la conique qui est la projection de la ligne de courbure donnée, l'angle qu'elles font est constant et égal à l'angle donné $2i$.

14. Nous allons maintenant indiquer comment l'emploi des coordonnées elliptiques peut servir à résoudre le problème des trajectoires orthogonales sur l'ellipsoïde.

Pour cela, nous remarquerons d'abord qui si s, s' désignent les arcs des deux genres de lignes de courbure, il est évident que les équations différentielles suivantes,

$$\mathrm{U}\,ds + \mathrm{V}\,ds' = 0, \quad \mathrm{U}\,ds' - \mathrm{V}\,ds = 0,$$

représentent un système de courbes orthogonales.

Maintenant on a

$$ds = \sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)(a^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu, \quad ds' = \sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)(a^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu,$$

[*] Ce théorème se trouve déjà énoncé par M. Besge. *Voir* le tome XIV de ce Journal, page 247.

et, en substituant ces expressions dans les dernières équations, elles se transformeront dans les suivantes :

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu+\frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu=0,$$

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu-\frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu=0;$$

d'où, en posant

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},\quad \mathrm{M}=\frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}},$$

nous déduisons que si un système de courbes tracées sur un ellipsoïde est donné par l'équation différentielle

$$\mathrm{M}\,d\mu+\mathrm{N}\,d\nu=0,$$

l'équation différentielle du système orthogonal est

$$\frac{(a^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\frac{d\mu}{\mathrm{M}}-\frac{(a^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\frac{d\nu}{\mathrm{N}}=0.$$

15. Appliquons maintenant ces généralités.

Si les courbes données sont les sections circulaires de la surface, il est facile de voir qu'elles sont toutes représentées par l'équation différentielle

$$\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}\pm\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}=0;$$

en sorte que l'équation du système orthogonal est

$$(17)\qquad \frac{a^2-\mu^2}{\mu^2-b^2}\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}\pm\frac{a^2-\nu^2}{b^2-\nu^2}\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}=0,$$

équation qui s'intègre tout de suite par des fonctions logarithmiques et circulaires.

En combinant cette dernière équation avec le théorème que nous venons de donner, n° **12**, relativement à la projection des courbes ellipsoïdales, nous retombons sur les résultats contenus dans un Mémoire de M. Catalan, inséré dans ce Journal (*voir* le tome XIII, pages 483 à 490).

S'il s'agissait de trouver le système orthogonal des courbes de contact de tous les cônes de révolution qu'on peut circonscrire à l'ellipsoïde, nous aurions, pour l'équation donnée,

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = 0;$$

en sorte que l'équation cherchée serait

$$(18) \qquad \frac{(a^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2-b^2}\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}} \mp \frac{(a^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2-\nu^2}\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0,$$

dont l'intégration s'effectue par des fonctions elliptiques.

Supposons encore que le système donné représente les lignes géodésiques qui passent par un ombilic de la surface, ou bien qu'on a

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0;$$

l'équation du système orthogonal s'écrit sous la forme suivante :

$$d\mu\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \mp d\nu\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0;$$

ce qui fournit l'explication de la règle que nous avons donnée au nº **2**, relativement à l'emploi du double signe qui se trouve dans l'équation de la ligne géodésique.

16. Remarquons ici que les courbes représentées par les équations (17) et (18) passent toutes par les ombilics opposés, et, ainsi que les lignes géodésiques qui passent par un ombilic, jouissent d'une propriété remarquable par rapport aux lignes de courbure. En effet, si le point T se meut le long d'une ligne de courbure, on a

$$\tang \frac{\mathrm{TOO'}}{2} \tang \frac{\mathrm{TO'O}}{2} = \text{constante},$$

ou

$$\frac{\tang \frac{\mathrm{TOO'}}{2}}{\tang \frac{\mathrm{TO'O}}{2}} = \text{constante},$$

où OT, OT′ sont deux lignes qui appartiennent simultanément à l'un ou à l'autre des systèmes de courbes (17) et (18).

17. Pour terminer ces applications, nous allons chercher l'expression pour l'angle sous lequel une ligne géodésique qui passe par un ombilic coupe un système de courbes données par une équation différentielle du premier ordre entre μ et ν. Pour cela, si l'on désigne par ε l'angle dont il s'agit, on a

$$\tang \varepsilon = \frac{y\,d\omega}{\sin\omega\,d\rho};$$

mais l'équation (2) donne, par différentiation,

$$\frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,\frac{d\omega}{\sin\omega},$$

d'où nous tirons, en ayant égard à la valeur de y en coordonnées elliptiques,

$$\sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu \pm \sqrt{\frac{(a^2-\nu^2)(\mu^2-b^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu = \frac{y\,d\omega}{\sin\omega},$$

et, en même temps,

$$\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\,d\mu \mp \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\,d\nu = d\rho,$$

en sorte que nous avons pour tang ε la valeur suivante :

$$\tang \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}}\;\frac{(b^2-\nu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}\dfrac{d\mu}{d\nu} \pm (\mu^2-b^2\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}\dfrac{d\mu}{d\nu} \mp \sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)}},$$

où la valeur de $\frac{d\mu}{d\nu}$ est déterminée par l'équation donnée.

18. Si l'équation donnée appartient aux courbes de contact des cônes droits circonscrits à la surface, on a

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \pm\sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

et la valeur correspondante de tang ε devient

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

ce qui donne

$$y\,\text{tang}\,\varepsilon = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Cette équation exprime une propriété qui a son analogue dans les sections coniques, savoir : le rayon vecteur tiré d'un foyer d'une conique coupe la courbe sous un angle tel, que le produit de sa tangente trigonométrique et de la distance du point d'intersection à l'axe le plus grand de la courbe est constant.

SUR UNE QUESTION DE THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. J.-A. SERRET.

M. Kronecker a donné, dans le tome XXIX du Journal de M. Crelle, une démonstration simple et élégante de ce théorème :

Si p est un nombre premier, l'équation $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$ *est irréductible.*

La proposition sur laquelle repose cette démonstration est susceptible d'extension et peut alors s'énoncer ainsi :

Si p désigne un nombre premier et que $f(x)$ soit un polynôme à coefficients entiers, tel que $f(1)\equiv 1$ (mod. p), on aura $f(\alpha)f(\beta)\ldots f(\omega)\equiv 1$ (mod. p), $\alpha, \beta,\ldots, \omega$ étant les racines primitives de l'équation $x^{p^\mu}-1=0$.

Pour le démontrer, posons

$$F_n(x)=f(x)f(x^2)f(x^3)\ldots f\left(x^{p^n}\right)=A_0+A_1x+\ldots,$$

remplaçons x par chaque racine de $x^{p^n}-1=0$, et ajoutons les résultats : on aura

$$\text{(A)}\ \left\{\begin{aligned} &(p^n-p^{n-1})F_n(\alpha)+(p^{n-1}-p^{n-2})[F_{n-1}(\alpha_1)]^p+(p^{n-2}-p^{n-3})[F_{n-2}(\alpha_2)]^{p^2}+\ldots \\ &+(p^2-p)[F_2(\alpha_{n-2})]^{p^{n-2}}+(p-1)[F_1(\alpha_{n-1})]^{p^{n-1}}+[f(1)]^{p^n}\equiv 0 \pmod{p^n}, \end{aligned}\right.$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-1}$ désignant des racines primitives des équations respectives

$$x^{p^n}-1=0,\quad x^{p^{n-1}}-1=0,\quad x^{p^{n-2}}-1=0,\ldots,\quad x^p-1=0.$$

La congruence (A) sert à prouver que $F_n(\alpha)\equiv 1$ (mod. p), α étant une racine primitive de $x^{p^n}-1=0$. On le démontre immédiatement pour $n=1$; ensuite on voit aisément que, si cela a lieu pour $n=1, 2,\ldots, \mu-1$, cela est vrai aussi pour $n=\mu$. Divisant ensemble les congruences $F_\mu(\alpha)\equiv 1$ et $F_{\mu-1}(\alpha_1)\equiv 1$ (mod. p), on a

$$f(\alpha)f(\beta)\ldots f(\omega)\equiv 1 \pmod{p},$$

où $\alpha, \beta,\ldots, \omega$ désignent les racines primitives de $x^{p^\mu}-1=0$.

De là on peut conclure que l'équation $\dfrac{x^{p^\mu}-1}{x^{p^{\mu-1}}-1}=X=0$ est irréductible, car si $X=f(x)\varphi(x)$, les coefficients de $f(x)$ et $\varphi(x)$ seront entiers, on aura $f(1)\varphi(1)=p$, d'où $f(1)=1$ et $\varphi(1)=p$; par suite, $\alpha, \beta,\ldots, \omega$ étant les racines de $X=0$, on aura $f(\alpha)f(\beta)\ldots f(\omega)\equiv 1$ (mod. p), ce qui est absurde, car le premier membre est nul.

On déduit facilement de là que, quel que soit m, l'équation $x^m-1=0$ devient irréductible quand on l'a débarrassée de ses racines non primitives.

SUR

LA THÉORIE
DE LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS;

PAR M. W.-J. DONKIN,
Professeur d'Astronomie à l'Université d'Oxford.

La théorie que je vais exposer a été déjà publiée dans un essai que j'ai présenté à la *Société Ashmoléenne* d'Oxford. Mais les Mémoires de cette Société n'ayant point de circulation générale, je profite de l'occasion que le rédacteur de ce Journal a bien voulu m'accorder, pour la présenter encore aux géomètres dans une forme plus accessible.

Les résultats auxquels je suis parvenu ne sont que le développement en forme précise et démonstrative d'une idée qui n'est point nouvelle; c'est-à-dire de l'idée d'une analogie entre les formules de la théorie de la combinaison des observations et celles qu'on rencontre dans quelques parties de la Mécanique. Mais personne, que je sache, n'a réussi auparavant à trouver la clef de cette analogie, ni à donner l'unité aux diverses ressemblances isolées, en les ramenant à un seul principe fondé sur des raisonnements d'un caractère démonstratif. C'est ce que je crois avoir fait dans le Mémoire suivant, en établissant une espèce de Statique métaphysique sur des preuves de la même force que celles qu'on emploie en déduisant, à priori, les lois de la Statique ordinaire. Les résultats de cette méthode sont parfaitement identiques avec ceux qu'a trouvés M. Gauss par le procédé exposé dans sa *Theoria combinationis observationum, etc.*, comme on le verra, au moins dans tous les cas où une comparaison peut avoir lieu. Quant au caractère de mes raisonnements, quelque jugement qu'on puisse se former sur leur validité, je crois qu'il faudra admettre

qu'ils ne contiennent rien d'arbitraire; que nulle hypothèse n'a été adoptée qui ne fût pas évidemment la plus vraisemblable, ou plutôt la seule admissible entre toutes celles qui pouvaient être imaginées. Et cela étant, la correspondance parfaite entre les résultats de deux méthodes qui reposent sur des principes entièrement indépendants, doit au moins être censée un fait intéressant, dans le cas même où l'on ne serait pas satisfait de l'explication de cette correspondance.

I.

1. Supposons qu'une observation ait donné la valeur x_1 pour une quantité inconnue, et qu'une autre observation ait donné la valeur x_2 pour la même inconnue; si l'on ne sait rien de plus, il est évident que l'on doit attribuer à cette quantité quelque valeur x intermédiaire entre x_1 et x_2. Soit x_1 algébriquement moindre que x_2. Alors, la première observation, considérée à part, fournit un motif à diminuer la valeur de x; la seconde nous porte à l'augmenter. Donc x doit être déterminée de manière que ces deux motifs se fassent équilibre. Appelons *force* tout motif qui nous porte à altérer la valeur attribuée à une quantité; et tâchons de comparer numériquement les forces de cette espèce, et de trouver les lois auxquelles elles sont assujetties.

2. Admettons que deux observations quelconques, de différentes qualités, soient toujours comparables à l'égard de leurs *poids*, de la manière suivante; c'est-à-dire qu'il existe toujours deux nombres m et n tels, que si la première observation, m fois répétée, eût donné à chaque répétition la même valeur pour l'inconnue, nous aurions exactement la même connaissance de cette quantité que si sa valeur eût été tirée de la même manière de n répétitions de l'autre observation. Prenons les réciprocaux de m et de n pour mesures des *poids* des deux observations. Ainsi, en désignant par l'unité le poids d'une observation donnée, et en posant $\frac{m}{n} = g$, on aura g pour l'expression du poids d'une autre observation dont n répétitions équivaudraient à m répétitions de la première.

3. La détermination d'une seule inconnue par une observation di-

recte peut évidemment toujours être représentée par la détermination d'un point sur une ligne droite donnée, au moyen de la distance de ce point à un autre point fixe dans la même ligne. Supposons que deux observations, du même poids g, aient donné l'une le point A, et l'autre le point B, pour la position du point P qu'il s'agit de déterminer. Il est évident que l'on doit placer P à un point C également distant de A et de B; car il n'y a point de raison pour qu'on le plaçât plus près de l'un que de l'autre de ces deux points.

4. Le *poids* de cette détermination est $2g$. Je ne donnerai pas en détail la démonstration de cette proposition, qu'on établit aisément au moyen du principe de l'homogénéité, avec la même évidence qu'on peut donner, à priori, dans la Statique ordinaire, au théorème qui affirme que la résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme.

5. On pourra donc toujours remplacer les résultats de deux observations du même poids g, par leur moyenne arithmétique; et l'on pourra considérer cette nouvelle valeur de la quantité observée comme résultant d'une seule observation dont le poids est $2g$. Et, réciproquement, on pourra toujours remplacer une seule observation actuelle donnant $x = x_0$, et dont le poids est g, par deux observations imaginaires donnant $x = x_0 + c$, $x = x_0 - c$ respectivement, et dont les poids seraient égaux chacun à $\frac{1}{2}g$, en désignant par c une quantité arbitraire. D'où l'on tirera facilement la conclusion suivante, au moyen d'un raisonnement parfaitement semblable à celui qu'Archimède a employé pour établir la théorie du levier, et qu'il serait inutile de répéter ici; savoir, qu'en désignant par g_1, g_2, g_3,... les poids d'un nombre quelconque d'observations qui aient donné respectivement x_1, x_2, x_3,... pour la valeur d'une inconnue x, on peut toujours remplacer ce système d'observations actuelles par une seule observation imaginaire donnant

$$x = \frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + \ldots}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}, \tag{1}$$

avec un poids égal à $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$.

C'est ce que j'appellerai la valeur *la plus vraisemblable* de x.

6. Maintenant il sera facile de découvrir la loi de la variation des forces provenant des observations. Soit g le poids d'une observation qui ait assigné le point A pour la position d'un point qu'il s'agit de déterminer dans une ligne droite donnée. Si l'on place le point dans une autre position quelconque P, dont la distance à A soit r, la variation de la force f, qui l'attire vers A, s'exprimera évidemment par une équation homogène de la forme

$$\frac{f}{f_1} = \varphi\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

dans laquelle f_1 désigne la force à une distance constante r_1. D'ailleurs il est aisé de prouver que, pour une même distance, la force est proportionnelle au poids de l'observation. D'où il suit qu'en choisissant convenablement les unités de force, de poids et de longueur, on peut donner à cette équation la forme suivante

$$f = g \cdot \varphi(r),$$

et il ne reste qu'à déterminer la forme de la fonction $\varphi(r)$.

7. Pour cela, observons que la position d'équilibre du point P, donnée par l'équation (1) du n° **5**, serait précisément le centre de gravité des points assignés par les observations individuelles, si l'on attribuait à chacun de ces points une masse proportionnelle au poids de l'observation correspondante. Le problème se réduit donc à trouver la loi d'attraction selon laquelle la position d'équilibre d'un point soumis aux attractions d'un nombre quelconque de points matériels placés dans une ligne droite, se trouverait au centre de gravité de ces points. Or on sait que, pour que cette condition soit satisfaite, quelle que soit la disposition des masses attirantes, il est nécessaire et il suffit que la force soit en raison directe de la distance. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

8. *Soit g le poids d'une observation qui ait donné x_0 pour la valeur de la quantité observée, et soit x une valeur quelconque attribuée à cette quantité ; la force provenant de l'observation et tendant à réduire x à la valeur x_0, est proportionnelle au produit $g.(x - x_0)$, et peut s'exprimer par ce produit.*

9. Au moyen de ce théorème, on pourra toujours exprimer les valeurs des forces provenant des observations. Pour exprimer aussi les conditions de leur équilibre, il suffira d'employer le principe des *vitesses virtuelles*, dont on peut établir l'applicabilité par un procédé parfaitement semblable à celui de Lagrange. Je n'en donnerai pas ici les détails; seulement je ferai remarquer que la démonstration de Lagrange repose essentiellement sur les deux idées d'une ligne rigide et d'une ligne parfaitement flexible; idées dont on peut se servir également dans la recherche des propriétés des forces dont il s'agit ici.

10. Soit donc un système de valeurs v, v', v'',... attribuées à des quantités assujetties à des liaisons quelconques; et soient f, f', f'',... les forces qui agissent sur ces quantités; la condition d'équilibre sera

$$(2) \qquad fdv + f'dv' + f''dv'' + \ldots = 0.$$

[On démontrera ce théorème au moyen des considérations indiquées ci-dessus, et d'une construction dans laquelle v, v', v'', .. représentent les distances d'un point fixe A dans une ligne droite donnée, à des points P, P′, P″,... dans la même ligne, dont il s'agit de déterminer les positions.]

C'est sur ce théorème, et sur celui du n° 8, qu'est fondée toute la théorie suivante.

II.

11. Il importe de déterminer la relation entre le *poids* et la *précision*. (J'emploie ce dernier terme dans le sens connu.) Pour cela, posons $x = mz$, et désignons par l'unité la précision d'une observation dont le poids soit g, et qui ait donné pour x la valeur x_0. On en déduira pour z la valeur $z_0 = \frac{x_0}{m}$, et la précision de cette détermination de z sera m. Maintenant, si nous attribuons à ces deux quantités des valeurs quelconques x et $z = \frac{x}{m}$, nous savons (n° **8**) que la force qui tend à réduire x à la valeur observée x_0 est $g(x - x_0)$. Soit f la force inconnue qui tend à réduire z à la valeur z_0; si cette force agissait dans un sens contraire, il y aurait équilibre; on aura donc, par le principe des vitesses virtuelles (n° **10**),

$$fdz = g(x - x_0)\,dx,$$

d'où l'on tire aisément

$$f = m^2 g (z - z_0).$$

Or, en comparant ce résultat avec le théorème du n° 8, on voit que la force f, qui agit sur z, est la même que si la valeur de cette quantité, au lieu d'être *déduite* de la valeur observée de x, eût été déterminée par une *observation directe* dont le poids fût $m^2 g$; de sorte que $m^2 g$ est le poids de la détermination $z = z_0$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Soit g *le poids d'une observation dont la précision est l'unité; alors* $m^2 g$ *sera le poids d'une observation dont la précision est* m; ou, en d'autres termes, *le poids varie en raison directe du carré de la précision.*

12. Puisque le risque d'une erreur quelconque e dans une détermination dont la précision est m, est le même que le risque d'une erreur me dans une détermination dont la précision est l'unité, il suit du théorème précédent, qu'en désignant par e^2, e'^2, e''^2,... les carrés des erreurs qu'on a à craindre également dans des déterminations dont les poids sont g, g', g'',..., on aura

$$ge^2 = g'e'^2 = g''e''^2 = \ldots.$$

III.

13. Soit

$$u = \varphi(v, v', v'', \ldots)$$

une fonction donnée des quantités indépendantes v, v', v'',...; et soient g, g', g'',... les poids des observations qui ont donné pour ces quantités les valeurs

$$v = k, \quad v' = k', \quad v'' = k'', \ldots.$$

Alors, tant qu'on ne sait rien de plus, la valeur la plus vraisemblable de u, que nous désignerons par u_0, sera

$$u_0 = \varphi(k, k', k'', \ldots).$$

Mais si, sans aucune nouvelle connaissance sur les valeurs particu-

lières de v, v', v'',..., on était porté, par quelque motif que ce fût, à attribuer à u une valeur quelconque u_1 différente de u_0, il est clair que k, k', k'',... cesseraient alors d'être les valeurs les plus vraisemblables de v, v', v'',..., et que, de tous les systèmes des valeurs de ces quantités qui donneraient $u = u_1$, on devrait choisir celui qui ferait équilibre aux forces provenant des observations.

Or, la condition d'équilibre est (n^{os} **8** et **12**)

$$g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots = 0\,;$$

et puisque les variations de v, v', v'',... sont assujetties à la seule condition $u = u_1$, on aura

$$\frac{du}{dv}\,dv + \frac{du}{dv'}\,dv' + \frac{du}{dv''}\,dv'' + \ldots = 0.$$

En éliminant une des différentielles entre ces deux équations, et en égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des autres, on trouvera enfin

$$(3) \qquad \frac{g(v-k)}{\frac{du}{dv}} = \frac{g'(v'-k')}{\frac{du}{dv'}} = \frac{g''(v''-k'')}{\frac{du}{dv''}} = \ldots.$$

Cette formule, jointe à l'équation $u = u_1$, fournira autant d'équations qu'il y a des quantités v, v', v'',... à déterminer; et de cette manière on obtiendra les valeurs les plus vraisemblables que peuvent recevoir ces quantités en même temps que u reçoit la valeur u_1.

14. La formule (3) du dernier numéro, considérée à part, exprime la loi que doivent suivre les variations de v, v', v'',... quand on attribue à u une série de valeurs différentes. Je l'appellerai *la loi de l'équilibre relatif*, puisque, si elle a lieu, les valeurs de v, v', v'',... seront en équilibre entre elles pour chaque valeur de u.

15. Si les quantités v, v', v'',..., au lieu d'être indépendantes, étaient assujetties à des équations de condition quelconques, les conditions de l'équilibre relatif cesseraient d'être exprimées par la formule (3), et seraient données par les équations qu'on obtiendrait en différentiant les équations de condition et l'équation $u = u_1$, et en

égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des différentielles indépendantes, après avoir éliminé autant que possible d'entre elles.

16. Dans tous les cas, si l'on veut trouver la force provenant des observations et agissant sur u quand on attribue à cette quantité une valeur différente de u_0, soit f la force dont il s'agit; en l'appliquant en sens contraire, on aurait l'équilibre du système; et, par conséquent, en vertu du principe des vitesses virtuelles (nos 8 et **12**),

$$f du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots.$$

De cette équation, on tirera la valeur de f en substituant pour du la valeur $\frac{du}{dv}dv + \frac{du}{dv'}dv' + \ldots$, et pour dv, dv',... les valeurs qu'on obtient en différentiant les équations de l'équibre relatif, comme on le verra ci-après.

17. Il suit du no **8**, que si l'expression que l'on obtient ainsi pour f était de la forme

$$f = C(u-u_0),$$

dans laquelle C désigne une constante quelconque, alors C serait le *poids* de la détermination $u = u_0$. En tout autre cas, cette détermination n'aura point de *poids*, selon notre définition de ce terme, à moins que les erreurs possibles des observations ne soient très-petites; en admettant cette supposition, et en désignant par L la limite de l'expression $\frac{f}{u-u_0}$ correspondante à $u = u_0$, on aura, aux quantités du deuxième ordre près,

$$f = L(u-u_0),$$

et, par conséquent, le poids dont il s'agit sera exprimé par L.

IV.

18. Appliquons maintenant à quelques exemples les principes ci-dessus exposés.

PROBLÈME I. *Soit*

$$u = av + a'v' + a''v'' + \ldots$$

une fonction linéaire donnée des quantités indépendantes v, v', v'',..., et soient, comme auparavant, k, k', k'',... les valeurs de ces quantités fournies par des observations dont les poids soient g, g', g'',.... Soit, en outre,

$$u_0 = ak + a'k' + a''k'' + \ldots,$$

ce qui sera la valeur la plus vraisemblable de u. On demande le poids de la détermination $u = u_0$.

Solution. Si l'on attribue à u des valeurs quelconques différentes de u_0, les variations de v, v', v'',... devront suivre la loi de l'équilibre relatif, c'est-à-dire (n° **13**),

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{g(v-k)}{a} = \frac{g'(v'-k')}{a'} = \frac{g''(v''-k'')}{a''} = \ldots.$$

Soit f la force qui agit sur u, on a (n° **16**)

$$f\,du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots..$$

Or on tire aisément de la formule (A),

$$\frac{g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + g''(v''-k'')\,dv'' + \ldots}{a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \ldots}$$
$$= \frac{a(v-k) + a'(v'-k') + a''(v''-k'') + \ldots}{\frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots},$$

équation dont le premier membre équivaut évidemment à f, et le numérateur du second à $u - u_0$. On a donc enfin

$$f = \frac{u - u_0}{\frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots};$$

d'où il suit (n$^{\text{os}}$ **8** et **17**) qu'en désignant par G le poids qu'il s'agit de trouver, on aura

$$\frac{1}{\mathrm{G}} = \frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots.$$

(*Voir* la *Theoria combinationis* de M. Gauss, art. **18.**)

On peut aisément appliquer un procédé semblable au cas dans lequel u désigne une fonction quelconque, en négligeant les petites

quantités d'un ordre supérieur au premier. Mais je ne m'arrêterai pas à en donner les détails.

19. Problème II. *Les mêmes choses étant supposées que dans le problème* I, *soit, en outre,*

$$w = bv + b'v' + b''v'' + \ldots$$

une seconde fonction linéaire donnée de v, v', v'',... *dont*

$$w_0 = bk + b'k' + b''k'' + \ldots$$

*soit la valeur la plus vraisemblable. On demande les conditions de l'*indépendance *des deux déterminations* $u = u_0$, $w = w_0$.

Pour comprendre la signification de ce problème, il faut remarquer que si, sans apprendre rien de nouveau sur les valeurs particulières de v, v', v'',..., on était porté, par quelque motif que ce fût, à attribuer à u une valeur différente de u_0, alors w_0 cesserait, en général, d'être la valeur la plus vraisemblable de w. En effet, posons, comme auparavant,

$$\frac{1}{G} = \frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \frac{a''^2}{g''} + \ldots .$$

Si l'on attribue à u des valeurs quelconques, les variations de v, v', v'',... devront suivre la loi de l'équilibre relatif (n° **13**), savoir,

$$\frac{g(v-k)}{a} = \frac{g'(v'-k')}{a'} = \frac{g''(v''-k'')}{a''} = \ldots .$$

Or on tire aisément de cette formule la suivante

$$\frac{b(v-k) + b'(v'-k') + \ldots}{\frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \ldots} = \frac{a(v-k) + a'(v'-k') + \ldots}{\frac{a^2}{g} + \frac{a'^2}{g'} + \ldots},$$

ou, ce qui revient au même,

$$w - w_0 = G\left(\frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \frac{a''b''}{g''} + \ldots\right)(u - u_0).$$

Cette équation donne la valeur la plus vraisemblable de w, correspondante à une valeur quelconque de u. Et l'on voit que w ne peut

pas rester toujours égal à w_0, à moins qu'on n'ait

$$(1) \qquad \frac{ab}{g} + \frac{a'b'}{g'} + \frac{a''b''}{g''} + \ldots = 0,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante de l'indépendance des deux déterminations.

En supposant égaux les poids g, g', g'',..., on aurait

$$ab + a'b' + a''b'' + \ldots = 0$$

pour la condition cherchée, où l'on voit l'analogie entre cette condition et la perpendicularité géométrique.

Si les fonctions v, w n'étaient pas linéaires, ces conclusions subsisteraient encore pour de *petites* variations. Il faudrait seulement remplacer a, b, a', b',... par les valeurs de $\frac{du}{dv}, \frac{dw}{dv}, \frac{du}{dv'}, \frac{dw}{dv'}$,... correspondantes à $v = k$, $v' = k'$,....

20. Problème III. *Désignons par v, v',..., k, k',..., g, g',... les mêmes choses qu'auparavant; mais supposons que v, v', v'',..., au lieu d'être indépendantes, puissent être liées entre elles par des équations de conditions quelconques. Désignons par n un nombre positif, et soit*

$$(4) \qquad u = [g(v-k)^2 + g'(v'-k')^2 + g''(v''-k'')^2 + \ldots]^n.$$

On demande la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque.

Solution. Dans ce cas, l'équation qui exprime l'équilibre de v, v', v'',... pour une valeur particulière quelconque de u, savoir (n° **13**),

$$g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + \ldots = 0,$$

est satisfaite identiquement; puisque, d'après la forme de la fonction u, cette équation résulte immédiatement de la supposition

$$u = \text{constante}.$$

Il s'ensuit donc que tous les systèmes des valeurs de v, v', v'',... qui donnent une même valeur à u (en satisfaisant toujours aux équations de condition données), seront également vraisemblables; et l'on n'aura

point de motif pour préférer un de ces systèmes à un autre. On peut les nommer *systèmes de vraisemblance égale*. Maintenant, désignons par f la force qui agit sur u; nous aurons (n° **16**)

$$f du = g(v-k)\,dv + g'(v'-k')\,dv' + \ldots;$$

et, en remplaçant du par sa valeur tirée de l'équation (4), on trouve

$$\frac{1}{f} = 2nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

21. En posant

$$n=1 \quad \text{ou} \quad u = g(v-k)^2 + g'(v'-k')^2 + \ldots,$$

on a

$$f = \frac{1}{2}.$$

Donc, dans cas, il y a une force constante qui tend à diminuer la valeur de u, tant que cette quantité (qui est essentiellement positive) est différente de zéro. Par conséquent, la valeur la plus vraisemblable de u sera la plus petite que puisse recevoir cette fonction en vertu des équations de condition données, et les valeurs les plus vraisemblables de v, v', v'',... seront celles qui donnent à u cette valeur *minima*. Voilà le principe des moindres carrés. Mais je vais en donner une démonstration plus directe.

V.

22. Problème. *Soient x, y, z,... des variables indépendantes, et* V, V′, V″,... *des fonctions données de ces quantités. Soient* K, K′, K″,... *les valeurs de* V, V′, V″,... *données par des observations dont les poids soient* g, g', g'',.... *On demande les valeurs les plus vraisemblables de x, y, z,... et le poids de la détermination correspondante d'une fonction quelconque de ces quantités, en supposant que le nombre des fonctions* V, V′, V″,... *soit plus grand que celui des variables x, y, z,....*

Solution. On a (nos **8** et **10**), pour l'équation d'équilibre,

$$g(\mathrm{V}-\mathrm{K})\,d\mathrm{V} + g'(\mathrm{V}'-\mathrm{K}')\,d\mathrm{V}' + \ldots = 0,$$

laquelle se réduit à

$$\frac{1}{2}d\Omega = 0,$$

si l'on pose

$$\Omega = g(V - K)^2 + g'(V' - K')^2 + \ldots.$$

On voit donc que les valeurs cherchées de x, y, z,... doivent être choisies de manière que Ω reçoive la plus petite valeur possible. Or, x, y, z,... étant indépendantes, les équations finales pour les déterminer seront

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0, \ldots.$$

23. Soient x_0, y_0, z_0,... les valeurs de x, y, z,... tirées de ces équations, et soit Ω_0 la valeur correspondante (c'est-à-dire la valeur *minima*) de Ω.

Or, si l'on attribue à Ω une valeur particulière quelconque plus grande que Ω_0, la condition de l'équilibre relatif de x, y, z,... est satisfaite identiquement, puisque, dans ce cas comme dans le n° **20**, cette condition se réduit à $d\Omega = 0$; donc, x, y, z,... ne seront assujetties à aucune condition outre celle de donner à Ω la valeur particulière dont il s'agit. Soient X, Y, Z,... les forces agissant sur x, y, z,.... On prouvera, précisément comme dans le n° **21**, que la force agissant sur Ω est représentée par $\frac{1}{2}$. Par conséquent, on aura, comme dans les problèmes précédents, en vertu du principe des vitesses virtuelles,

$$\frac{1}{2}d\Omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots;$$

d'où l'on conclut, à cause de l'indépendance de x, y, z,...,

$$X = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx}, \quad Y = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy}, \quad Z = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz}, \ldots.$$

24. Soit u une fonction donnée quelconque de x, y, z,... et u_0 sa valeur plus vraisemblable, c'est-à-dire celle qui correspond à $x = x_0$, $y = y_0$,.... Appelons f la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque différente de u_0; nous savons (n° **23**) que la force agissant sur Ω est $\frac{1}{2}$; nous aurons donc, par le

principe des vitesses virtuelles,

$$(5) \qquad f du = \frac{1}{2} d\Omega,$$

équation dans laquelle les variables $x, y, z, \ldots$ sont assujetties aux conditions de l'équilibre relatif; c'est-à-dire (n° **13**), puisque X, Y, Z,... sont les forces agissant sur $x, y, z, \ldots$,

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\mathrm{X}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\mathrm{Y}}{\frac{du}{dy}} = \frac{\mathrm{Z}}{\frac{du}{dz}} = \ldots.$$

Cela posé, la valeur de f sera $\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{du}$, ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad f = (u - u_0) \frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2},$$

d'où l'on voit (n° **8**) que, dans le cas où $\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2}$ serait constante (ce qui, en général, n'arrivera pas), la valeur de cette quantité exprimerait le *poids* de l'équation $u = u_0$. En tous cas, on pourra prendre la *limite* de cette expression, ou, ce qui revient au même, la limite de $\frac{\Omega - \Omega_0}{(u - u_0)^2}$, pour représenter le poids dont il s'agit en supposant très-petites les erreurs des observations.

25. Dans le cas où l'expression $\frac{d\Omega}{d.(u - u_0)^2}$ obtient une valeur constante en vertu de la formule (A), n° **24**, soit G cette valeur; nous venons de voir que G exprime le poids de l'équation $u = u_0$. En intégrant l'équation

$$d\Omega = \mathrm{G}\, d.(u - u_0)^2,$$

on trouve

$$(7) \qquad \Omega - \Omega_0 = \mathrm{G}(u - u_0)^2,$$

équation qui n'est pas identique, mais qui subsiste en vertu de la formule (A). On voit aisément qu'elle donne le *minimum relatif* de Ω, c'est-à-dire la plus petite valeur que peut recevoir cette fonction en même temps que u reçoit une valeur quelconque donnée; en effet, la formule (A) exprime la coexistence des équations

$$d\Omega = 0, \quad du = 0.$$

Il suit de cette équation (7) que, si l'on ne peut supposer la vraie valeur de Ω plus grande que $\Omega_0 + \varepsilon^2$, alors la vraie valeur de u sera nécessairement comprise entre les limites $u_0 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{G}}$. (*Theor. comb.*, art. **30.**)

26. Prenons, par exemple, $u = \sqrt{\Omega - \Omega_0}$, alors $u_0 = 0$, les conditions (A) sont satisfaites identiquement, et l'on a

$$\frac{d\Omega}{d.(u-u_0)^2} = 1.$$

D'où il suit (n° **24**) que le poids de l'équation

$$\sqrt{\Omega - \Omega_0} = 0$$

est égal à l'unité. Par conséquent, si l'on sait, soit à priori, soit à posteriori, à l'aide des observations elles-mêmes (comme on le verra dans la suite), que $\pm\,\varepsilon$ est l'erreur à craindre dans une détermination dont le poids est l'unité, la valeur de Ω qu'on a à craindre sera évidemment $\Omega + \varepsilon^2$. Aussi, si l'on désigne par u, u_0, G les mêmes choses que dans le n° **25**, l'erreur à craindre dans la détermination $u = u_0$ sera $\pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}$. (*Voir* le n° **12**.)

27. Puisque l'équation d'équilibre relatif est satisfaite identiquement par la supposition $\Omega =$ contante, il s'ensuit, comme dans le n° **20**, que tous systèmes de valeurs de x, y, z,... qui donnent une même valeur à Ω, sont des systèmes de vraisemblance égale.

28. Dans le cas où il n'y a que trois variables indépendantes x, y, z, on peut donner une illustration géométrique de la théorie que je viens d'exposer. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point dont il s'agit de déterminer la position la plus vraisemblable. Cette position sera le point dont les coordonnées x_0, y_0, z_0 satisfassent aux équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

et à ce point, que je désignerai par O, les forces provenant des observations et agissant sur P se feront équilibre; mais, dans toute autre position, P sera soumis à une force dont les composantes seront X,

Y, Z. Si l'on donne à ε une série de valeurs croissantes, l'équation

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2$$

représentera un système de surfaces semblables disposées autour du point O, dont chacune sera une surface de vraisemblance égale. En effet, puisque X, Y, Z sont proportionnelles aux coefficients différentiels partiels de Ω, la force agissant sur P sera toujours normale à la surface sur laquelle ce point est placé; de sorte que, si P était obligé de rester constamment sur une quelconque de ces surfaces, il serait en équilibre en quelque position qu'on le plaçât. En désignant par ε la même chose que dans le n° **26**, on peut représenter le *manque de précision* du résultat, en disant que les observations déterminent, au lieu d'un *point*, l'*espace* inclus par la surface dont l'équation est

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2.$$

VI.

29. Considérons maintenant le cas où les fonctions V, V′, V″,... (n° **22**) sont linéaires, auquel se réduisent, comme on le sait, tous ceux qu'on rencontre ordinairement dans la pratique.

Posons

$$\sqrt{g}(V - K) = v, \quad \sqrt{g'}(V' - K') = v', \ldots.$$

Alors, puisqu'une observation de V, dont le poids est g, équivaut (n^{os} **11** et **12**) à une observation de $\sqrt{g}.V$, dont le poids est l'unité, nous pourrons supposer que les équations

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots,$$

aient été données par des observations dont chacune a un poids égal à l'unité.

Cela posé, soient

$$\begin{array}{l} v = ax + by + cz + \ldots + k, \\ v' = a'x + b'y + c'z + \ldots + k', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

nous aurons (n° **22**)

$$\Omega = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

puis, en posant $a^2+a'^2+a''^2+\ldots=\sum(a^2)$, etc.,

$$(8)\quad\begin{cases} X=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx}=\sum(a^2)\,x+\sum(ab)\,y+\sum(ac)\,z+\ldots+\sum(ak),\\ Y=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy}=\sum(ab)\,x+\sum(b^2)\,y+\sum(bc)\,z+\ldots+\sum(bk),\\ Z=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz}=\sum(ac)\,x+\sum(bc)\,y+\sum(c^2)\,z+\ldots+\sum(ck),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et les valeurs les plus vraisemblables x_0, y_0, z_0,... des inconnues seront celles qui satisferont aux équations

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\ldots.$$

30. Supposons qu'on ait déduit des équations (8), par l'élimination ordinaire, les valeurs de x, y, z,... en fonctions linéaires de X, Y, Z,...; il est clair que le terme constant dans la valeur de x doit être x_0, et ainsi pour les autres; de sorte qu'on aurait, en exprimant les coefficients par la notation de M. Gauss,

$$(9)\quad\begin{cases} x=x_0+[\alpha\alpha]X+[\alpha\beta]Y+[\alpha\gamma]Z+\ldots,\\ y=y_0+[\beta\alpha]X+[\beta\beta]Y+[\beta\gamma]Z+\ldots,\\ z=z_0+[\gamma\alpha]X+[\gamma\beta]Y+[\gamma\gamma]Z+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

31. Il est aisé de voir que les poids des équations

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0,\ldots,$$

s'expriment par les réciprocaux des coefficients $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$,....

En effet, si l'on attribue à x une valeur quelconque, la force agissant sur cette quantité est X; et, pour que les autres variables y, z,... soient en équilibre entre elles, il faut qu'on ait

$$Y=0,\quad Z=0,\ldots.$$

Or, en vertu de ces conditions, on tirera, de la première des équations (9),

$$X=\frac{x-x_0}{[\alpha\alpha]};$$

ce qui démontre (n° **8**) que le poids de l'équation $x = x_0$ est $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$. On emploiera un raisonnement semblable pour les autres variables. (*Theor. comb.*, art. **21**.)

32. Les coefficients $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$,... jouissent de plusieurs propriétés remarquables, dont je ne signalerai ici qu'une, qui est nécessaire à la solution du problème du numéro suivant.

Puisque

$$\frac{d\Omega}{dX} = \frac{d\Omega}{dx}\cdot\frac{dx}{dX} + \frac{d\Omega}{dy}\cdot\frac{dy}{dX} + \ldots,$$

en remplaçant dans cette expression les coefficients différentiels par leurs valeurs tirées des n^{os} **23** et **30**, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dX} = [\alpha\alpha]X + [\beta\alpha]Y + [\gamma\alpha]Z + \ldots,$$

et, semblablement,

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dY} = [\alpha\beta]X + [\beta\beta]Y + [\gamma\beta]Z + \ldots.$$

Or, puisque

$$\frac{d^2\Omega}{dY\,dX} = \frac{d^2\Omega}{dX\,dY},$$

on tire de ces deux équations,

$$[\beta\alpha] = [\alpha\beta].$$

On trouverait de même

$$[\beta\gamma] = [\gamma\beta], \text{ etc.}$$

Donc, en déduisant par l'intégration des expressions de $\frac{d\Omega}{dX}$, $\frac{d\Omega}{dY}$,... la valeur de Ω en fonction de X, Y, Z,..., et en observant que Ω doit se réduire à Ω_0 en même temps que X, Y, Z,... s'évanouissent, on aura

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_0 &+ [\alpha\alpha]X^2 + [\beta\beta]Y^2 + [\gamma\gamma]Z^2 + \ldots\\ &+ 2[\beta\gamma]YZ + 2[\gamma\alpha]ZX + 2[\alpha\beta]XY + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui est la propriété dont il s'agit.

33. Problème. *Soit*

$$u = lx + my + nz + \ldots + h$$

une fonction linéaire de $x, y, z, \ldots$ *dont la valeur la plus vraisemblable est*

$$u_0 = lx_0 + my_0 + nz_0 + \ldots + h.$$

On demande le poids de l'équation $u = u_0$.

Solution. Remplaçons dans l'expression de u les quantités $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs en termes de X, Y, Z,... (nº 30), et soit

$$u = u_0 + \mathfrak{A}X + \mathfrak{B}Y + \mathfrak{C}Z + \ldots$$

le résultat de cette substitution.

Maintenant, en désignant par f la force qui agit sur u quand on attribue à cette quantité une valeur quelconque, nous aurons, comme auparavant (nº 24),

$$f du = \tfrac{1}{2} d\Omega = X dx + Y dy + Z dz + \ldots,$$

et les conditions de l'équilibre relatif seront (nº 13)

$$(A) \qquad \frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} = \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \ldots = \frac{\mathfrak{A}X + \mathfrak{B}Y + \mathfrak{C}Z + \ldots}{l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots} = \frac{X dx + Y dy + Z dz + \ldots}{l dx + m dy + n dz + \ldots}$$
$$= \frac{u - u_0}{l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots} = \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{du} = f;$$

donc, en posant

$$\frac{1}{G} = l\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} + n\mathfrak{C} + \ldots,$$

on a

$$f = G(u - u_0),$$

et, par conséquent (nº 8), G est le poids cherché.

On trouve une autre expression pour G par le procédé suivant.

Puisque

$$\frac{1}{f} = \frac{l}{X} = \frac{m}{Y} = \frac{n}{Z} = \ldots,$$

en multipliant par une de ces fractions chaque terme des équations (9) du n° **30**, on trouve

$$x - x_0 = f.\{l[\alpha\alpha] + m[\alpha\beta] + n[\alpha\gamma] + \ldots\},$$
$$y - y_0 = f.\{l[\alpha\beta] + m[\beta\beta] + n[\gamma\beta] + \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

puis, en ajoutant ces dernières équations, après les avoir multipliées respectivement par l, m, n,..., on obtient

$$u - u_0 = f.\left\{\begin{array}{l} l^2[\alpha\alpha] + m^2[\beta\beta] + n^2[\gamma\gamma] + \ldots \\ + 2mn[\beta\gamma] + 2nl[\gamma\alpha]\, 2lm[\alpha\beta] + \ldots \end{array}\right\},$$

ou

$$f = G(u - u_0),$$

où $\frac{1}{G}$ est l'expression qu'on obtiendrait en écrivant l, m, n,... au lieu de X, Y, Z,... dans la valeur de $\Omega - \Omega_0$ (n° **32**). (*Voir* la *Theor. comb.*, art. **29**.)

34. En intégrant l'équation

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = G(u - u_0)\,du,$$

on a, comme dans le n° **25**,

$$\Omega - \Omega_0 = G(u - u_0)^2,$$

équation qui a lieu seulement en vertu de la formule (A). Et en désignant, comme auparavant, par $\pm\varepsilon$ l'erreur à craindre dans une détermination dont le poids soit l'unité, on aura $\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}$ pour l'erreur à craindre dans l'équation $u = u_0$; expression qui, dans les cas particuliers de

$$u = x, \quad u = y, \quad u = z, \ldots,$$

devient

$$\pm\,\varepsilon\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \pm\,\varepsilon\sqrt{[\beta\beta]}, \quad \pm\,\varepsilon\sqrt{[\gamma\gamma]}, \ldots$$

En supposant les variables indépendantes réduites à trois, et en les considérant comme les coordonnées rectangulaires d'un point P, on aura, pour les surfaces de vraisemblance égale, un système d'ellipsoïdes semblables dont le centre commun est la position la plus vraisemblable du point P; et l'espace inclus par l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2,$$

représentera le manque de précision de cette détermination.

On peut poursuivre cette illustration dans plusieurs détails intéressants, et même l'étendre au cas général, en suivant l'analogie entre l'équation de l'ellipsoïde et l'équation

$$\Omega = \text{constante},$$

dans laquelle le nombre des variables indépendantes est quelconque. Mais je me contenterai ici de l'avoir seulement indiquée.

Je vais maintenant expliquer la méthode de déduire des observations la valeur de ε^2.

VII.

35. La quantité que nous avons désignée par ε est ce que M. Gauss a appelé *error medius metuendus*. Si l'on connaissait les erreurs actuelles de n déterminations indépendantes, dont chacune aurait un poids égal à l'unité, alors le quotient qu'on obtiendrait en divisant par n la somme des carrés de ces erreurs, représenterait la valeur de ε^2 avec d'autant plus d'exactitude que le nombre n serait plus considérable.

Or je vais démontrer qu'en désignant par σ le nombre des observations ou des fonctions v, v', v'',..., et par τ le nombre des inconnues x, y, z,..., on peut toujours tirer des observations elles-mêmes $\sigma - \tau$ exemples de l'erreur d'une détermination dont le poids est l'unité, et que la somme des carrés de ces erreurs est égale à Ω_0. Donc, on pourra poser

$$\varepsilon^2 = \frac{\Omega_0}{\sigma - \tau}$$

avec d'autant plus de confiance que le nombre $\sigma - \tau$ est plus grand.

36. En effet, soit l, l', l'',..., $l^{(\sigma-1)}$ un système de σ coefficients qui satisfassent aux τ équations

$$\begin{aligned} al + a'l' + a''l'' + \ldots &= 0, \\ bl + b'l' + b''l'' + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

ou

$$\sum(al) = 0, \quad \sum(bl) = 0, \quad \sum(cl) = 0, \ldots, \tag{10}$$

nous aurons alors identiquement

$$lv + l'v' + l''v'' + \ldots = lk + l'k' + l''k'' + \ldots, \tag{11}$$

ou

$$\sum(lv) = \sum(lk).$$

Or les observations donnent

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots,$$

avec des poids égaux à l'unité; de sorte que la valeur de $\sum(lv)$ déduite *immédiatement* [*] des observations est

$$\sum(lv) = 0,$$

et le poids de cette détermination est (nº **18**) le réciprocal de $l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots$. Supposons que l, l', l'',... soient assujetties, outre les équations (10), à la condition

$$\sum(l^2) = 1.$$

Nous aurons donc, au moyen de l'équation (11), un exemple actuel de l'erreur e d'une détermination dont le poids est l'unité, savoir,

$$e = \sum(lk).$$

Maintenant, puisque l'élimination des τ quantités x, y, z,... entre

[*] C'est-à-dire sans avoir égard aux liaisons qui ont lieu entre v, v', v'',....

les σ équations

$$v = ax + by + cz + \ldots,\quad v' = a'x + b'y + c'z + \ldots,$$

peut fournir, en général, $\sigma - \tau$ équations linéaires essentiellement différentes entre v, v', v'',..., telles que l'équation (11), on pourra trouver $\sigma - \tau$ exemples distincts d'une erreur telle que e. Pour cela, posons

$$\sigma - \tau = i,$$

et soient

$$\begin{array}{llll} l_1, & l'_1, & l''_1,\ldots, & l_1^{(\sigma-1)},\\ l_2, & l'_2, & l''_2,\ldots, & l_2^{(\sigma-1)},\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ l_i, & l'_i, & l''_i,\ldots, & l_i^{(\sigma-1)}, \end{array}$$

des coefficients dont chaque système compris dans une ligne horizontale soit assujetti aux τ équations

$$(12)\qquad \sum(al) = 0,\quad \sum(bl) = 0,\quad \sum(cl) = 0,\ldots.$$

On aura donc identiquement

$$\sum(l_1 v) = \sum(l_1 k),\quad \sum(l_2 v) = \sum(l_2 k),\ldots,\quad \sum(l_i v) = \sum(l_i k).$$

Or on tire directement des observations

$$(13)\qquad \sum(l_1 v) = 0,\quad \sum(l_2 v) = 0,\ldots,\quad \sum(l_i v) = 0;$$

de sorte qu'on a les i erreurs actuelles

$$e_1 = \sum(l_1 k),\quad e_2 = \sum(l_2 k),\ldots,\quad e_i = \sum(l_i k);$$

seulement, afin qu'on puisse se servir de ces exemples pour en déduire l'*erreur moyenne*, il faut choisir les coefficients l_1, etc., de manière que les équations (13) soient des déterminations *indépendantes* (n° **19**), et, de plus, qu'elles aient chacune le même poids. Il faudra donc ajouter aux équations (12) les suivantes, c'est-à-dire les $\frac{i(i-1)}{2}$ équations

$$(14)\qquad \sum(l_1 l_2) = 0,\quad \sum(l_1 l_3) = 0,\quad \sum(l_2 l_3) = 0,\ldots,$$

en vertu desquelles (n° **19**) les déterminations (13) seront indépendantes; et, de plus, les i équations

$$(15)\qquad \sum(l_1^2)=1,\quad \sum(l_2^2)=1,\ldots,\quad \sum(l_i^2)=1,$$

en vertu desquelles chacune de ces déterminations aura un poids égal à l'unité.

Il faut observer que le nombre des coefficients l, etc., est σi, tandis que le nombre des équations (12), (14), (15) est $i\left(\sigma-\frac{i-1}{2}\right)$, ce qui ne peut jamais surpasser σi; de sorte qu'on pourra généralement satisfaire à toutes les conditions d'une infinité de manières différentes. Cependant le résultat sera toujours le même, comme nous allons le voir.

37. Posons

$$e_1=\sum(l_1 k),\quad e_2=\sum(l_2 k),\ldots,\quad e_i=\sum(l_i k).$$

Ce sont les erreurs actuelles de i déterminations indépendantes dont chacune a un poids égal à l'unité.

Maintenant, puisque v, v', v'',... sont assujetties (n° **36**) aux i équations de condition

$$\sum(l_1 v)=\sum(l_1 k),\quad \sum(l_2 v)=\sum(l_2 k),\ldots,\quad \sum(l_i v)=\sum(l_i k),$$

on peut se servir de ces équations pour trouver la valeur *minima* de Ω ou de $\sum(v^2)$. En effet, en égalant à zéro les différentielles de Ω et de ces i équations, on a

$$\sum(v\,dv)=0,\quad \sum(l_1\,dv)=0,\ldots,\quad \sum(l_i\,dv)=0,$$

équations qu'on peut remplacer par les σ suivantes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} v &= P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots + P_i l_i,\\ v' &= P_1 l_1' + P_2 l_2' + \ldots + P_i l_i',\\ v'' &= P_1 l_1'' + P_2 l_2'' + \ldots + P_i l_i'',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

en désignant par P_1, P_2,..., P_i des multiplicateurs indéterminés. Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées, la première par l_1, la deuxième par l'_1, etc.; il résulte

$$\sum (l_1 v) = P_1,$$

d'où l'on tire

$$P_1 = e_1.$$

De même, en multipliant les équations par l_2, l'_2,..., on trouverait

$$P_2 = e_2,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$P_i = e_i.$$

Ainsi les équations (16) deviennent

$$\begin{aligned} v &= e_1 l_1 + e_2 l_2 + \ldots + e_i l_i, \\ v' &= e_1 l'_1 + e_2 l'_2 + \ldots + e_i l_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

lesquelles sont les valeurs de v, v', v'',..., qui donnent à Ω sa valeur *minima* Ω_0. Or, si l'on ajoute leurs carrés en ayant égard aux équations (14), (15), on obtient pour la valeur actuelle de cette *minima*,

$$\Omega_0 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_i^2.$$

38. Il s'ensuit donc que la valeur moyenne du carré de l'erreur d'une détermination dont le poids est l'unité, est

$$\varepsilon^2 = \frac{\Omega_0}{i} = \frac{\Omega_0}{\sigma - \tau},$$

à en juger par les i exemples e_1, e_2,..., e_i; et puisqu'il n'y en a point d'autres, cette expression fournit la meilleure valeur de ε qu'on puisse obtenir sans d'autres connaissances que celles que fournissent les observations elles-mêmes. Ainsi l'erreur à craindre dans une détermination quelconque dont le poids soit G, sera (nos 26 et 34)

$$\pm \sqrt{\frac{\Omega_0}{(\sigma - \tau) G}}.$$

39. Ces résultats s'accordent d'une manière remarquable avec ceux qu'a donnés la méthode de M. Gauss. En effet, ce géomètre a dé-

montré (*Theor. comb.*, art. 38) qu'en désignant par μ^2 la *vraie* valeur de ε^2, c'est-à-dire celle qu'on déduirait d'un nombre infini d'exemples, et par M la valeur *moyenne* qu'on trouverait pour Ω_0, en répétant un nombre infini de fois le système entier des observations, on aurait

$$\mu^2 = \frac{M}{\sigma - \tau}.$$

Mais, puisque la vraie valeur de M est inconnue, on est obligé de se contenter de celle que fournit le système unique actuel des observations. Ainsi la valeur la plus vraisemblable de ε^2 se trouve exprimée, comme ci-dessus, par $\frac{\Omega_0}{\sigma - \tau}$.

40. Je ferai remarquer, en conclusion, qu'on ne peut établir entre $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_\sigma^2$ aucune relation différente de celle qu'exprime l'équation

$$e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_\sigma^2 = \Omega_0;$$

de sorte que cette équation fournit le seul moyen que nous possédions d'évaluer, à posteriori, les erreurs des observations.

DISCUSSION ANALYTIQUE

De deux surfaces particulières qui jouissent de la propriété d'avoir pour chacun de leurs points les deux rayons de courbure égaux et de signes contraires;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Dans un Mémoire, inséré dans le tome XI de ce Journal, page 300, j'ai donné quelques détails relatifs aux équations intégrales qui représentent généralement toutes les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens opposés. J'ai déterminé les formes particulières que prennent les fonctions arbitraires qui se trouvent dans ces équations quand elles appartiennent à une surface engendrée par une droite ou à une surface de révolution. Dans le Mémoire actuel, je me propose de présenter deux nouvelles surfaces qui comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai déjà discutées, et qui, je crois, méritent d'être remarquées. Elles offrent, en outre, une application assez élégante de la théorie des fonctions elliptiques. La première sera représentée par le système suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{-1}\; x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ \sqrt{-1}\,\alpha y = \sin\lambda + \sin\mu, \\ \qquad \alpha z = \int\sqrt{\cos^2\lambda + \alpha^2\sin^2\lambda}\,d\lambda + \int\sqrt{\cos^2\mu + \alpha^2\sin^2\mu}\,d\mu, \end{cases}$$

où nous supposons que α est moindre que l'unité. Il est facile de voir que si $\alpha = 1$, ce système appartient à un héliçoïde gauche.

Il faut d'abord faire disparaître les imaginaires, ce qui peut s'effectuer de la manière suivante.

On a évidemment

$$(\sqrt{-1}\,x - \cos\lambda)^2 + (\sqrt{-1}\,\alpha y - \sin\lambda)^2 = 1,$$

d'où

$$\cos^2\lambda - \sqrt{-1}\,x\cos\lambda - \frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2+4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = 0,$$

ce qui donne

$$\cos\lambda\cos\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2+4\alpha^2 y^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{P},$$

et, pareillement,

$$\sin\lambda\sin\mu = -\frac{(x^2+\alpha^2 y^2)^2+4x^2}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} = \mathrm{Q}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$t = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{\alpha^2 + t^2(1-\alpha^2)},$$

ou

$$(2) \qquad t^2 - \frac{2\mathrm{P}}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2}\,t + \frac{\mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2\alpha^2}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2} = 0,$$

en posant $\alpha'^2 = 1 - \alpha^2$. Si l'on substitue 1 pour t dans le premier membre de cette équation, il devient

$$\frac{\alpha^2 y^2(x^2+\alpha^2 y^2+4)}{(x^2+\alpha^2 y^2)(1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2)},$$

et pour $t = -1$, sa valeur est $-\frac{x^2}{1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2}$. Il suit de là que l'équation (2) n'a qu'une racine entre -1 et $+1$, représentons-la par $\cos\omega$; l'autre sera comprise entre -1 et $-\infty$, ou entre $+1$, $+\infty$, selon que la quantité $1-\mathrm{Q}^2\alpha'^2$ est positive ou négative. En combinant la formule pour l'addition des fonctions elliptiques de la seconde espèce avec la troisième équation du système (1), nous tirons

$$\alpha z = \int_0^\omega \sqrt{\cos^2\omega + \alpha^2\sin^2\omega}\,d\omega + \alpha'^2\sin\lambda\sin\mu\sin\omega,$$

ou, en faisant usage de la notation connue,

$$(3) \qquad \alpha z = \mathrm{E}(\alpha',\omega) - \frac{\alpha'^2[(x^2+\alpha^2 y^2)^2+4x^2]}{4(x^2+\alpha^2 y^2)}\sin\omega,$$

et notre surface sera représentée par les équations (2) et (3), en posant dans la première $t = \cos\omega$.

Ce système peut se transformer assez élégamment d'une manière que je vais maintenant exposer. L'équation (2) peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{gathered} 4(x^2+\alpha^2 y^2)\cos\omega \\ = [(x^2+\alpha^2 y^2)^2+4x^2]\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-(x^2+\alpha^2 y^2)^2-4\alpha^2 y^2, \end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered} (x^2+\alpha^2 y^2)^2\left(1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}\right) \\ = 4x^2\left(\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega\right)-4\alpha^2 y^2(1+\cos\omega), \end{gathered}$$

ce qui donne

$$(x^2+\alpha^2 y^2)^2 = 4x^2\,\frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}} - 4\alpha^2 y^2\,\frac{1+\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}}.$$

Soit maintenant

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}},$$

et la théorie des fonctions elliptiques nous donne

$$\frac{1+\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\alpha'^2\sin^2\varphi},$$

et aussi

$$\frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}-\cos\omega}{1-\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\omega}} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2\cos^2\varphi},$$

en sorte que l'équation (2) devient

$$(x^2+\alpha^2 y^2)^2 = \frac{4\alpha^2}{\alpha'^2}\left(\frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}\right), \tag{4}$$

et l'équation (3), en y introduisant l'angle φ, se transforme en

$$\frac{\alpha z}{2} = \mathrm{E}(\alpha',\varphi) - \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}\left(\frac{x^2\sin^2\varphi-\alpha^2 y^2\cos^2\varphi}{x^2+\alpha^2 y^2}\right). \tag{5}$$

Le système (1) se remplace donc par les équations (4) et (5) qui ne contiennent plus d'imaginaires.

Pour la ligne de plus grande pente sur cette surface, on a (*voir* le tome XI de ce Journal, page 304)

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}\,d\lambda - \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}\,d\mu = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$E(\alpha', \lambda) - E(\alpha', \mu) = \text{constante}.$$

Maintenant, si nous posons

$$E(\alpha', \lambda) - E(\alpha', \mu) = E(\alpha', \vartheta) - \alpha'^2 \sin\lambda \sin\mu \sin\vartheta,$$

il n'est pas difficile de voir que $\cos\vartheta$ est la plus grande racine de l'équation (2); d'où, en substituant pour $\cos\vartheta$, $\sqrt{-1}\tang\psi$, ψ sera une fonction réelle des quantités x et y; en sorte que l'équation de la ligne de plus grande pente s'écrit finalement

$$\int_0^\psi \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\psi}}{\cos^2\psi}\,d\psi - \alpha'^2 \tang\psi\left[\frac{(x^2+\alpha^2y^2)^2+4x^2}{4(x^2+\alpha^2y^2)}\right] = \text{constante}.$$

Les quantités $\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}$, $\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}$ sont des fonctions imaginaires conjuguées de x et y. En effet, nous avons

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda} + \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu} = \frac{\sin(\lambda+\mu)[\cos(\lambda-\mu)-\cos\omega]}{\sin\lambda\sin\mu\sin\omega},$$

et aussi

$$\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda} - \sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu} = \frac{\sin(\lambda-\mu)[\cos(\lambda+\mu)-\cos\omega]}{\sin\lambda\sin\mu\sin\omega}.$$

Mais le système (1) donne

$$\cos(\lambda+\mu) = \frac{x^2-\alpha^2y^2}{x^2+\alpha^2y^2},\quad \cos(\lambda-\mu) = -\frac{x^2+\alpha^2y^2+2}{2},$$

$$\sin(\lambda+\mu) = \frac{2\alpha xy}{x^2+\alpha^2y^2},\quad \sin(\lambda-\mu) = \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{(x^2+\alpha^2y^2)(x^2+\alpha^2y^2+4)}}{2},$$

et, en vertu de ces dernières équations, la proposition dont il s'agit est démontrée.

Cherchons à présent l'équation des lignes asymptotiques sur la surface. Pour cela, les équations qui se trouvent dans mon Mémoire (*voir* le tome XI de ce Journal, page 303) donnent, dans le cas actuel,

$$\frac{d\lambda}{\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}} = 0, \tag{6}$$

et il faut transformer cette dernière en une équation entre x et y débarrassée des imaginaires. Nous poserons d'abord

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}-\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}+\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\lambda}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}-\sqrt{\alpha}}{(1-\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}}, \quad \cos\psi' = \frac{\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\mu}+\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})\sqrt[4]{1-\alpha'^2\sin^2\mu}},$$

et

$$k^2 = \frac{(1-\sqrt{\alpha})^2}{2(1+\alpha)}, \quad k'^2 = \frac{(1+\sqrt{\alpha})^2}{2(1+\alpha)}.$$

Mais l'équation donne, en intégrant par des fonctions elliptiques,

$$F(k,\theta) + F(k',\psi) \pm [F(k,\theta') + F(k',\psi')] = \text{constante}$$

(*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques,* tome I, page 179), et, en posant

$$F(k,\theta) + F(k,\theta') = F(k,\theta''), \quad F(k,\theta) - F(k,\theta') = F(k,\theta_{\prime\prime}),$$
$$F(k',\psi) + F(k',\psi') = F(k',\psi''), \quad F(k',\psi) - F(k',\psi') = F(k',\psi_{\prime\prime}),$$

les lignes asymptotiques seront représentées par les équations suivantes :

$$F(k,\theta'') + F(k',\psi'') = \text{constante}, \tag{7}$$
$$F(k,\theta_{\prime\prime}) + F(k',\psi_{\prime\prime}) = \text{constante}. \tag{8}$$

Il est à observer que les fonctions qui entrent dans ces équations sont à modules complémentaires.

Considérons maintenant l'équation

$$t = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\sqrt{k'^2 + k^2 t^2},$$

ce qui donne

$$t^2 - \frac{2\cos\theta\cos\theta'}{1-k^2\sin^2\theta\sin^2\theta'}\,t + \frac{\cos^2\theta\cos^2\theta' - k'^2\sin^2\theta\sin^2\theta'}{1-k^2\sin^2\theta\sin^2\theta'} = 0. \tag{9}$$

On voit immédiatement que les racines de cette équation sont les quantités que nous venons de nommer $\cos\theta''$, $\cos\theta_{\prime\prime}$. Or, en substituant

-1 pour t dans le premier membre de la dernière équation, il devient

$$\frac{(\cos\theta - \cos\theta')^2}{1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\theta'},$$

et la substitution de $+1$ donne pour résultat

$$\frac{(\cos\theta + \cos\theta')^2}{1 - k^2 \sin^2\theta \sin^2\theta'}.$$

Mais, en nous reportant aux expressions de $\cos\theta$, $\cos\theta'$ en fonction de x et de y, il est facile de voir qu'on a

$$\cos\theta = \text{L} + \text{M}\sqrt{-1}, \quad \cos\theta' = \text{L} - \text{M}\sqrt{-1},$$

où L, M sont des fonctions réelles de x et y, en sorte que l'équation (9) n'a qu'une racine entre -1 et $+1$. Il suit de là que l'équation (7) ne contient que des quantités réelles, tandis que les angles $\theta_{\prime\prime}$, $\psi_{\prime\prime}$, qui se trouvent dans l'équation (8), sont imaginaires. On peut les faire disparaître de cette manière. Posons

$$\cos\theta_{\prime\prime} = \sqrt{-1}\,\text{tang}\,\zeta_{\prime}, \quad \cos\psi_{\prime\prime} = \sqrt{-1}\,\text{tang}\,\zeta_{\prime\prime};$$

alors $\zeta_{\prime}$, $\zeta_{\prime\prime}$ seront des fonctions réelles de x et y, et l'équation (8) se transformera dans la suivante :

$$\text{F}(k', \zeta_{\prime}) + \text{F}(k, \zeta_{\prime\prime}) = \text{constante}.$$

Une marche tout à fait semblable à celle que nous venons de suivre, sert à déterminer l'équation des lignes de courbure.

La seconde surface que nous nous proposons de discuter, sera représentée par le système suivant :

$$(10)\begin{cases} x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ \alpha y = \sin\lambda - \sin\mu, \\ \alpha z = \sqrt{-1}\left(\int\sqrt{\cos^2\lambda + \alpha^2\sin^2\lambda}\,d\lambda + \int\sqrt{\cos^2\mu + \alpha^2\sin^2\mu}\,d\mu\right). \end{cases}$$

Il faut d'abord chasser les imaginaires, ou bien présenter l'équation de la surface sous une forme réelle. On a

$$(x - \cos\lambda)^2 + (\alpha y - \sin\lambda)^2 = 1,$$

ce qui donne

$$\cos^2 \lambda - x \cos \lambda + \frac{(x^2 + \alpha^2 y^2)^2 - 4 \alpha^2 y^2}{4(x^2 + \alpha^2 y^2)} = 0,$$

d'où nous avons

$$\cos \lambda \cos \mu = \frac{(x^2 + \alpha^2 y^2)^2 - 4 \alpha^2 y^2}{4(x^2 + \alpha^2 y^2)} = \mathrm{P},$$

et aussi

$$\sin \lambda \sin \mu = - \frac{(x^2 + \alpha^2 y^2)^2 - 4 x^2}{4(x^2 + \alpha^2 y^2)} = \mathrm{Q}.$$

Pour que le système (10) puisse représenter une surface réelle, il faut que la quantité $x^2 + \alpha^2 y^2$ ne soit pas moindre que 4; et attendu qu'on a

$$\cos \lambda \cos \mu = \frac{(x^2 + \alpha^2 y^2)(x^2 + \alpha^2 y^2 - 4) + 4 x^2}{4(x^2 + \alpha^2 y^2)},$$

et

$$\sin \lambda \sin \mu = - \frac{(x^2 + \alpha^2 y^2)(x^2 + \alpha^2 y^2 - 4) + 4 \alpha^2 y^2}{4(x^2 + \alpha^2 y^2)},$$

il suit de là que $\cos \lambda \cos \mu$ est essentiellement positif, et $\sin \lambda \sin \mu$ est essentiellement négatif. Nous posons maintenant, comme auparavant,

$$t = \mathrm{P} - \mathrm{Q} \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 t^2},$$

ou

(11) $$t^2 - \frac{2\mathrm{P}}{1 + \mathrm{Q}^2 \alpha'^2} t + \frac{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 \alpha^2}{1 - \mathrm{Q}^2 \alpha'^2} = 0.$$

Il n'est pas difficile de voir que cette équation a une racine comprise entre $+1$ et -1, et propre à représenter le cosinus d'un angle réel; et l'autre entre $+1$, $+\infty$ ou entre -1, $-\infty$, selon que $1 - \mathrm{Q}^2 \alpha'^2$ est négatif ou positif; et, en écrivant, conformément à la notation des fonctions elliptiques,

$$\mathrm{E}(\alpha', \lambda) + \mathrm{E}(\alpha', \mu) = \mathrm{E}(\alpha', \sigma) + \alpha'^2 \sin \lambda \sin \mu \sin \sigma,$$

$\cos \sigma$ est la racine la plus grande de l'équation (11) (abstraction faite du signe); d'où, en posant

$$\sin \sigma = \sqrt{-1} \tang \psi,$$

ψ est une fonction réelle de x et y, et l'équation de la surface dont il s'agit s'écrit par le système suivant :

$$P\cos\psi - Q\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi} = 1,$$

$$\alpha z = \operatorname{tang}\psi\left[\frac{\alpha'^2\left(\overline{x^2+\alpha^2 y^2}^2 - 4x^2\right)}{4(x^2+\alpha^2 y^2)} - \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}\right] - F(\alpha,\psi) + E(\alpha,\psi).$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sur cette surface peuvent être déterminées d'une manière semblable à celle que nous avons déjà employée.

Nous terminerons en faisant un examen de la trace de cette surface sur le plan des x, z. Pour cela, soit $y = 0$, ce qui donne $\lambda = \mu$ dans le système (10); d'où la courbe dont il s'agit est représentée par les équations suivantes :

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{x^2-4}}{2},\quad \alpha z = 2\sqrt{-1}\,E(\alpha',\lambda).$$

Pour faire disparaître les imaginaires, nous poserons

$$\sin\lambda = \sqrt{-1}\operatorname{tang}\omega,$$

et l'équation de la courbe résulte de l'élimination de ω entre les équations suivantes :

$$x = 2\operatorname{séc}\omega,\quad \frac{\alpha z}{2} = \operatorname{tang}\omega\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\omega} + F(\alpha,\omega) - E(\alpha,\omega).$$

Cette courbe admet une équation assez simple entre son arc (s) et l'abscisse (x). En effet, on a

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{ds}{d\omega} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\omega}}{\cos^2\omega},$$

d'où nous tirons

$$\alpha\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{\alpha'^2 x^2 + 4\alpha^2}{x^2-4}};$$

ce qui donne

$$\alpha\sqrt{dx^2+dz^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}},$$

ou bien, en intégrant,

$$\alpha s = \sqrt{x^2-4}.$$

Nous allons maintenant démontrer que la courbe dont il s'agit est comprise entre deux asymptotes.

Pour cela, remarquons d'abord que l'équation de la droite tangente au point x', z' est

$$z - z' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha'^2 x'^2 + 4\alpha^2}{x'^2 - 4}}\,(x - x'),$$

et, si nous posons

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha'^2 x'^2 + 4\alpha^2}{x'^2 - 4}} = \pm \frac{\alpha'}{\alpha},$$

on tire pour x' une valeur infinie, et pareillement pour z'.

Il suit de là que la droite ayant pour équation

$$z = \frac{\alpha'}{\alpha}\,x,$$

est parallèle à une asymptote. Cherchons la distance de l'origine des coordonnées au point où cette asymptote rencontre l'axe des abscisses (x). Dans l'équation

$$z - z' = \frac{\alpha'}{\alpha}(x - x'),$$

soit $z = 0$, ce qui donne

$$x = \frac{\alpha' x' - \alpha z'}{\alpha'},$$

ou, en remettant pour x', z' leurs valeurs en fonction de ω,

$$x = \frac{2}{\alpha'}\left[\alpha \operatorname{séc}\omega - \operatorname{tang}\omega\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\omega} - F(\alpha, \omega) + E(\alpha, \omega)\right],$$

ce qui donne, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$x = -\frac{2[F(\alpha) - E(\alpha)]}{\alpha'}.$$

La distance de l'origine au point où l'asymptote coupe l'axe des z est $-\frac{2[F(\alpha) - E(\alpha)]}{\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, la courbe devient la chaînette, et les asymptotes passent à l'infini.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. J. BERTRAND.

On sait que les normales à une même surface jouissent de propriétés nombreuses et indépendantes de la surface particulière que l'on considère. Ces propriétés constituent une partie importante de la théorie des surfaces. Je cherche, dans ce Mémoire, à caractériser d'une manière analogue les normales principales d'une même courbe. Ces droites jouissent, comme je le fais voir, de propriétés très-précises et indépendantes de la courbe particulière que l'on considère. En d'autres termes, une surface gauche étant donnée, ses génératrices ne sont pas toujours les normales principales d'une même courbe. Les surfaces réglées peuvent être, sous ce point de vue, partagées en quatre classes :

1°. Les surfaces dont les génératrices ne sont les normales principales d'aucune courbe;

2°. Les surfaces qui ont pour génératrices les normales principales d'une seule courbe;

3°. Les surfaces dont les génératrices sont, à la fois, normales principales de deux courbes distinctes;

4°. Enfin, les surfaces dont les génératrices sont normales principales d'un nombre infini de courbes distinctes : cette dernière classe ne contient que les héliçoïdes à plan directeur.

Une surface étant donnée, j'indique le moyen de déterminer la classe à laquelle elle appartient.

Parmi les résultats particuliers auxquels je suis parvenu, je citerai les suivants :

Les normales principales d'une courbe ne peuvent jamais former une surface du second degré.

Pour que les normales principales d'une courbe soient, en même temps, normales principales d'une autre courbe, il faut et il suffit qu'il existe, entre les deux courbures de cette courbe, une relation linéaire.

I.

Si les génératrices d'une surface réglée sont les rayons de courbure d'une ligne tracée sur cette surface, cette ligne a, en chaque point, son plan osculateur tangent à la surface.

On sait, en effet, que le plan osculateur d'une courbe passe par la tangente à cette courbe et par la normale principale. Or ces deux lignes sont ici la tangente à une ligne tracée sur la surface réglée et la génératrice même de la surface. Elles déterminent, par conséquent, le plan tangent qui coïncide, par suite, avec le plan osculateur de la courbe.

Si les génératrices d'une surface réglée sont les normales principales d'une ligne tracée sur cette surface, en chaque point de cette ligne, la section faite dans la surface par un plan normal à la génératrice a un rayon de courbure infini.

On sait, en effet, par le théorème de Meunier, que le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface est le produit du rayon de la section normale menée suivant la même tangente, par le cosinus de l'angle que fait le plan de cette section avec le plan osculateur de la première courbe. Or la courbe dont les normales principales sont les génératrices de la surface a, d'après ce qui précède, son plan osculateur tangent à la surface, et le cosinus de l'angle formé par ce plan avec celui de la section normale correspondante est, par suite, égal à zéro. Il faut, par conséquent, pour que le produit ne soit pas nul, que l'autre facteur, c'est-à-dire le rayon de la section normale, soit infini.

En chaque point de la courbe dont les normales principales sont

les génératrices d'une surface gauche, les rayons de courbure de la surface sont égaux et de signes contraires.

La somme des courbures principales d'une surface quelconque est égale, en effet, à la somme des courbures de deux sections normales faites, en un même point, perpendiculairement l'une à l'autre. Or, d'après ce qui précède, si l'on fait, en chaque point de la courbe considérée, deux sections normales, l'une suivant la génératrice, l'autre normalement à la génératrice, ces deux sections (dont la première est une ligne droite) ont l'une et l'autre une courbure nulle; la somme de ces deux courbures, et, par suite, la somme des courbures de la surface est donc égale à zéro.

II.

Le dernier des théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent permet de décider si une surface réglée peut être considérée comme le lieu des normales principales d'une courbe. Il faut, en effet, pour cela, qu'il existe sur la surface donnée une série de points pour lesquels les rayons de courbure soient égaux et de sens contraire, et que, de plus, ces points forment une courbe normale aux génératrices. On peut voir facilement que cette condition nécessaire est en même temps suffisante. Si, en effet, elle est remplie, la section normale à la surface faite perpendiculairement à la génératrice en chacun des points de la courbe considérée, doit avoir un rayon de courbure infini. Il faut donc que le plan osculateur de cette ligne soit tangent à la surface; car, sans cela, le cosinus de l'angle qu'il forme avec le plan normal de la surface n'étant pas nul, le rayon de courbure de la courbe devrait aussi être infini, ce qui, évidemment, ne peut avoir lieu qu'en des points particuliers. Nous sommes donc conduits à nous proposer ce premier problème :

Quels sont les points sur une surface gauche pour lesquels la somme des rayons de courbure de la surface est égale à zéro?

Considérons une surface gauche représentée par les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = z\varphi(\alpha) + \alpha, \\ y = z\psi(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha), \end{cases}$$

et, sur cette surface, une génératrice que, pour plus de simplicité, nous supposerons confondue avec l'axe des z. Admettons, en outre, pour simplifier les calculs, que l'on ait pris pour origine le point de cette génératrice le plus rapproché de la génératrice infiniment voisine, et que le plan des ZX soit tangent à la surface à l'origine; on aura évidemment alors

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varphi(0)=0, & \psi(0)=0, & F(0)=0, \\ \varphi'(0)=0, & F'(0)=0. & \end{array}\right.$$

Cherchons les points de l'axe des z pour lesquels la somme des courbures principales est nulle. Ces points sont ceux pour lesquels la courbure de la section parallèle au plan des XY est infinie. Il faut donc, pour les déterminer, écrire que la courbe représentée par les deux équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = z\varphi(\alpha) + \alpha, \\ x = z\psi(\alpha) + F(\alpha), \end{array}\right.$$

dans lesquelles on regarde z comme une constante, a un rayon de courbure infini pour $\alpha = 0$. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait pour cette valeur de α,

$$(4)\qquad dx\,d^2y - dy\,d^2z = 0.$$

Or on déduit immédiatement des équations (3),

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} dx = [z\varphi'(\alpha) + 1]\,d\alpha, & dy = [z\psi'(\alpha) + F'(\alpha)]\,d\alpha, \\ d^2x = z\varphi''(\alpha)\,d\alpha^2, & d^2y = [z\psi''(\alpha) + F''(\alpha)]\,d\alpha^2. \end{array}\right.$$

et l'équation (4) devient, en ayant égard aux conditions (2),

$$(6)\qquad z^2\varphi''(0)\psi'(0) - z\psi''(0) - F''(0) = 1.$$

Cette équation est du second degré. Il y a donc, sur chaque génératrice, deux points, au plus, pour lesquels les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires. Le lieu des points qui, sur la surface, jouissent de cette propriété est donc composé de deux courbes distinctes qui peuvent se confondre ou disparaître si les racines sont égales ou imaginaires. Si l'équation (6) est satisfaite identiquement, tous les points de la génératrice satisfont à la condition demandée.

Avant d'aller plus loin, nous exprimerons les coefficients de l'équation (6) en fonction des éléments qui pourraient servir de définition à la surface gauche.

Remarquons d'abord qu'en faisant $z = 0$ dans les équations (1), on obtient

$$x = \alpha,$$
$$y = F(\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$y = F(x), \tag{7}$$

pour équation de la section faite dans la surface par le plan des XY. Si l'on remarque que $F'(0) = 0$, on voit que $F''(0)$ est la courbure de cette section, et, par suite, la somme des courbures de la surface gauche au point de la génératrice le plus rapproché de la génératrice voisine, c'est-à-dire au point où l'axe des z perce la ligne que les géomètres appellent quelquefois *ligne de striction de la surface*.

Si nous désignons cette somme par $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, nous aurons

$$F''(0) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \tag{8}$$

la génératrice infiniment voisine de l'axe des z a pour équations, si l'on a égard aux conditions (2),

$$x = d\alpha,$$
$$y = z\psi'(\alpha)\,d\alpha.$$

Sa plus courte distance à l'axe des z est $d\alpha$, l'angle qu'elle fait avec cet axe est $\psi'(0)\,d\alpha$; en sorte que $\psi'(0)$ est le rapport de l'angle de deux génératrices infiniment voisines à leur plus courte distance. Mais on démontre facilement que ce rapport est l'inverse de la racine carrée du produit des rayons de courbure principaux de la surface à l'origine des coordonnées; on a donc

$$\psi'(0) = \frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}. \tag{9}$$

Pour calculer $\psi''(0)$, qui figure aussi dans l'équation (6), nous

allons chercher la dérivée de la fonction $\frac{1}{\sqrt{-R_1R_2}}$ par rapport à l'arc de la ligne de striction. Commençons par calculer la valeur de cette fonction $\frac{1}{\sqrt{-R_1R_2}}$ pour un point quelconque de la ligne de striction.

Soit une génératrice ayant pour équations

$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha),$$
$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha;$$

les équations de la génératrice infiniment voisine sont

$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha) + z\psi'(\alpha)\,d\alpha + F'(\alpha)\,d\alpha,$$
$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha + z\varphi'(\alpha)\,d\alpha + d\alpha.$$

$\frac{1}{\sqrt{-R_1R_2}}$ est égal, comme nous l'avons dit plus haut, au rapport de l'angle de ces génératrices à leur plus courte distance. Or, en indiquant leur angle par θ, on trouve sans difficulté

$$\theta^2 = \frac{\psi'^2 + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}{(1 + \varphi^2 + \psi^2)^2}\,d\alpha^2.$$

Quant à la plus courte distance ε, sa valeur est

$$\varepsilon = \frac{d\alpha(\psi' - F'\varphi')}{\sqrt{\psi' + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')}};$$

on a donc

$$-\frac{1}{RR_1} = \frac{\theta^2}{\varepsilon^2} = \frac{[\psi'^2 + \varphi'^2 + (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2]^2}{(1 + \varphi^2 + \psi^2)^2(\psi' - F\varphi')^2}.$$

Pour avoir la dérivée de $-\frac{1}{RR_1}$ par rapport à α, il faut retrancher de cette expression la valeur $\psi'(0)^2$, qui correspond à $\alpha = 0$, et diviser la différence par $d\alpha$, après avoir supposé α infiniment petit et égal lui-même à $d\alpha$. Or on a évidemment, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et à cause des équations (2),

$$\psi(d\alpha) = \psi'(0)\,d\alpha,$$
$$\psi'(d\alpha) = \psi'(0) + \psi''(0)\,d\alpha,$$
$$\varphi(d\alpha) = 0,$$
$$\varphi'(d\alpha) = \varphi''(0)\,d\alpha,$$
$$F'(d\alpha) = F''(0)\,d\alpha,$$

et il vient par suite, en négligeant les infiniment petits du second ordre, et pour la valeur $d\alpha$ attribuée à α,

$$\frac{-1}{R_1 R_2} = \frac{[\psi'(0)^2 + 2\psi'(0)\psi''(0)\,d\alpha]^2}{[\psi'(0) + \psi''(0)\,d\alpha]^2};$$

et si nous retranchons de cette expression $\psi'(0)^2$, et que nous divisions par $d\alpha$, nous obtiendrons sans difficulté

$$-\frac{d\frac{1}{R_1 R_2}}{d\alpha} = 2\psi'(0)\psi''(0);$$

on en conclut, en remplaçant $\psi'(0)$ par $\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$,

$$(10) \qquad \psi''(0) = -\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{R_1 R_2}}{d\alpha}\sqrt{-R_1 R_2}.$$

Si, enfin, nous nommons φ l'angle de la ligne de striction avec la plus courte distance $d\alpha$ de deux génératrices consécutives, et ds l'arc de cette ligne de striction compris entre les génératrices considérées, on aura

$$d\alpha = ds\cos\varphi,$$

et, par suite, l'équation (10) équivaut à

$$(11) \qquad \psi''(0) = -\frac{1}{2\cos\varphi}\frac{d\frac{1}{R_1 R_2}}{ds}\sqrt{-R_1 R_2}.$$

Il nous reste à calculer $\varphi''(0)$. Pour cela, nous chercherons à déterminer l'angle que nous venons de désigner par φ et que forme la ligne de striction avec la plus courte distance des deux génératrices. Pour y parvenir, remarquons que la ligne de striction coupe la génératrice qui se confond avec l'axe des z, à l'origine même des coordonnées. Si donc nous cherchons l'ordonnée du point où elle rencontre la génératrice infiniment voisine, le rapport de cette ordonnée à la plus courte distance $d\alpha$ sera la tangente de l'angle φ.

Cherchons donc le point où une génératrice quelconque

$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha,$$
$$y = z\psi(\alpha) + F(\alpha),$$

est coupée par la ligne de striction, c'est-à-dire l'extrémité de sa plus courte distance à la génératrice infiniment voisine,

$$x = z\varphi(\alpha) + \alpha + z\varphi'(\alpha)\,d\alpha + d\alpha,$$
$$y = z\psi(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha) + z\psi'(\alpha)\,d\alpha + \mathrm{F}'(\alpha)\,d\alpha.$$

Or, en cherchant le point où la plus courte distance de ces droites perce la première, on trouve, en employant les formules connues de la géométrie analytique à trois dimensions,

$$z = \frac{\varphi' - \psi\varphi\psi' + \psi^2\varphi' + \mathrm{F}'\psi' + \mathrm{F}'\varphi^2\psi' - \mathrm{F}'\varphi\psi\varphi}{-\varphi'^2 + 2\varphi'\psi\varphi\psi' - \varphi'^2\psi^2 - \psi'^2 - \psi'^2\varphi^2}.$$

C'est cette valeur de z qu'il faut diviser par $d\alpha$, après y avoir supposé à α la valeur infiniment petite $d\alpha$. Or, en ayant égard aux équations (2), et procédant comme nous l'avons fait plus haut, on trouve

$$\lim \frac{z}{d\alpha} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\varphi''(0) + \psi'(0)\,\mathrm{F}''(0)}{-\psi'(0)^2},$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi''(0) &= -\psi'(0)^2 \operatorname{tang}\varphi - \psi'(0)\,\mathrm{F}''(0) \\ &= \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right). \end{aligned}\right.$$

En substituant dans l'équation (6) les valeurs fournies par les formules (8), (9), (11), (12) pour ses différents coefficients, elle devient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{z^2}{\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}\left[\frac{-\operatorname{tang}\varphi}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} + \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}} \\ &\quad + \frac{z\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d\dfrac{-1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{ds}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $\operatorname{tang}\varphi = 0$, c'est-à-dire si la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, l'équation devient

$$(14)\qquad 0 = -\frac{z^2}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) - \frac{z\sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{2}\,\frac{d\dfrac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}}{ds} + \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}.$$

En portant sur chaque génératrice, à partir de la ligne de striction,

une longueur égale à l'une des racines de cette équation, on obtiendra la ligne en tous les points de laquelle les courbures de la surface sont égales et de signes contraires. Pour que cette ligne coupe à angle droit les génératrices, il faut, dans le cas où l'angle φ est nul, que la valeur de z soit constante. Si l'on veut qu'il existe sur la surface deux courbes dont les rayons de courbure coïncident avec les génératrices, il faut que les deux racines de l'équation (14) soient constantes, et, par suite, il doit en être de même de leur produit qui, évidemment, est $\frac{-1}{R_1 R_2}$; mais alors $\frac{d\frac{1}{R_1 R_2}}{ds}$ est nul, et l'équation devient

$$\frac{-z^2}{R_1 R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0.$$

Or cette équation est impossible, car, dans une surface gauche, $R_1 R_2$ est négatif et les racines sont, par conséquent, imaginaires. Nous avons donc ce résultat :

Il est impossible qu'une surface dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, c'est-à-dire la surface formée par les normales aux plans osculateurs d'une courbe, contienne deux lignes distinctes dont les génératrices soient les normales principales.

La formule (13) peut aussi servir à la démonstration d'un théoreme connu :

L'héliçoide à plan directeur est la seule surface réglée dont les rayons de courbure en chaque point soient égaux et de signes contraires.

Pour qu'une surface jouisse, en effet, de cette propriété, il faut que l'équation (13) soit satisfaite pour toutes les génératrices, quelle que soit la valeur de z. On doit donc avoir, aux différents points de la ligne de striction,

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi}{(-R_1 R_2)^{\frac{3}{2}}}=0, \tag{16}$$

$$\sqrt{-R_1 R_2}\,\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{d\frac{1}{\sqrt{-R_1 R_2}}}{ds}=0. \tag{17}$$

L'équation (16) exige que tang φ soit égal à zéro ou $R_1 R_2 = \infty$; mais cette dernière hypothèse n'est pas admissible, car il faudrait pour cela, d'après l'équation (15), que R_1 et R_2 fussent l'un et l'autre infinis en chaque point et la surface se réduirait à un plan. Il faut donc supposer $\varphi = 0$, et, par suite, la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit; mais alors $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ désigne, comme on s'en assure facilement, la courbure de cette ligne de striction, et puisque cette somme est nulle en vertu de l'équation (15), la ligne de striction est droite, et, par suite, les génératrices de la surface coupent toutes une même droite à laquelle elles sont perpendiculaires.

D'ailleurs l'équation (17) exige que $R_1 R_2$ soit constant et que, par suite, il existe un rapport constant entre l'angle de deux génératrices infiniment voisines et leur plus courte distance. Les plus courtes distances étant ici toutes comptées sur la même droite et l'angle de deux génératrices quelconques étant la somme des angles formés par deux génératrices intermédiaires, on en conclut qu'il existe un rapport constant entre la distance de deux génératrices quelconques et l'angle qu'elles font entre elles, et que la surface est un héliçoïde.

III.

Une surface gauche étant définie par sa ligne de striction et l'angle que cette ligne forme en chaque point avec la génératrice, l'équation (14) obtenue plus haut permettra de trouver, dans chaque cas, le lieu des points pour lesquels la somme des courbures est égale à zéro. Pour savoir s'il existe sur la surface une ligne dont les génératrices soient normales principales, il suffira de chercher si cette courbe coupe à angle droit les génératrices, ce qui se fera facilement dans chaque cas particulier.

Il peut arriver que, pour trouver le lieu des points pour lesquels la somme des courbures est nulle, il soit plus simple de ne pas recourir aux formules du paragraphe précédent; nous en donnerons un exemple en résolvant le problème suivant:

Est-il possible que les rayons de courbure d'une ligne forment une surface gauche du second degré?

Considérons la surface qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et cherchons s'il est possible de tracer sur elle une courbe qui ait ses génératrices pour normales principales. Cette courbe, si elle existe, est, comme nous l'avons vu, le lieu des points pour lesquels la somme des courbures principales est égale à zéro. Or on sait qu'en chacun de ces points il passe deux génératrices rectilignes. La section normale, conduite suivant une d'elles, ayant une courbure nulle, il doit en être de même de la section perpendiculaire qui, par suite, doit être aussi rectiligne. Les points en question sont donc ceux où deux génératrices rectilignes se coupent à angle droit. Or de pareils points peuvent être considérés comme les sommets d'angles trièdres circonscrits à la surface; et, en effet, nous avons trois plans tangents perpendiculaires deux à deux qui ont ce point pour intersection commune, savoir, le plan de deux génératrices et les plans perpendiculaires à celui-là menés par chacune d'elles, lesquels touchent nécessairement la surface, puisqu'ils contiennent une génératrice. Or on sait que le lieu des sommets d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre est une sphère qui, dans le cas actuel, a pour équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

La courbe cherchée est l'intersection de cette sphère avec l'hyperboloïde. Mais cette courbe ne peut pas couper les génératrices à angle droit; pour qu'elle fût, en effet, perpendiculaire à l'une des génératrices qui se croisent en chacun de ses points, il faudrait qu'elle fût tangente à l'autre, et l'hyperboloïde n'étant pas une surface développable, ses génératrices ne peuvent être tangentes à une même courbe.

Ainsi donc, *les rayons de courbure d'une ligne courbe ne peuvent jamais former un hyperboloïde.*

Pour répondre complètement à la question énoncée, il nous reste à examiner si les normales principales d'une courbe peuvent former un paraboloïde. Nous traiterons pour cela une question plus générale.

Quelles sont les courbes dont les normales principales sont parallèles à un même plan?

Si nous considérons une courbe qui satisfasse à la condition énoncée et que, par les différents points, nous abaissions des perpendiculaires sur le plan auquel les rayons de courbure sont parallèles, nous formerons une surface cylindrique à laquelle les rayons de courbure de la courbe donnée seront normaux. Cette courbe est donc une ligne géodésique tracée sur le cylindre, ou, en d'autres termes, une *hélice*. On s'assurera facilement que les rayons de courbure d'une hélice ne forment, dans aucun cas, un paraboloïde.

IV.

Nous allons chercher enfin quelles sont les surfaces réglées dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes distinctes. Nous déterminerons, pour cela, les courbes dont les rayons de courbure peuvent coïncider, en direction, avec ceux d'une autre courbe, ou, d'après ce qui précède, les courbes telles, qu'il existe sur la surface gauche lieu de leurs rayons de courbure, une seconde ligne coupant ces rayons à angle droit, et en tous les points de laquelle la somme des courbures de la surface soit égale à zéro. Pour y parvenir, nous chercherons quelle longueur on doit porter sur chaque rayon de courbure pour obtenir un point pour lequel la somme des courbures de la surface soit nulle; nous exprimerons ensuite que cette longueur est constante.

Considérons une courbe représentée par les trois équations

$$(a) \qquad x = \varphi_1(s), \quad y = \varphi_2(s), \quad z = \varphi_3(s),$$

entre l'arc s et les coordonnées orthogonales d'un point. Supposons que l'on ait pris pour axe des z le rayon de courbure correspondant à $s = 0$, et, pour plan des ZX, le plan osculateur en ce point, en sorte que l'on ait, pour $s = 0$,

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ \frac{dx}{ds} = 0, & \frac{dy}{ds} = 0, & \frac{dz}{ds} = 0, \\ \frac{d^2x}{ds^2} = 0, & \frac{d^2y}{ds^2} = 0, & \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{1}{\rho}. \end{array} \right.$$

Cherchons la condition pour que l'origine des coordonnées soit précisément le point où la surface gauche lieu des rayons de courbure, a ses

rayons de courbure égaux et de signes contraires. Il faut pour cela que la section faite dans cette surface par le plan des XY ait un rayon de courbure infini, et, par suite, que la distance de cette section à sa tangente soit un infiniment petit du troisième ordre. Nous chercherons donc les deux coordonnées infiniment petites x et y du point de cette courbe qui correspond à une valeur infiniment petite ds attribuée à l'arc s, et nous écrirons que le rapport $\frac{y}{x}$ ne diffère de sa limite pour $ds = 0$, que d'un infiniment petit du second ordre. Les cosinus des angles formés par un rayon de courbure avec les axes des coordonnées, sont proportionnels à $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$. Pour le point qui correspond à une valeur infiniment petite ds de l'arc s, et en vertu des hypothèses exprimées par les équations (b), les trois coefficients différentiels peuvent être remplacés par

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}, \quad \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds + \frac{d^4y}{ds^4}\frac{ds^2}{2}, \quad -\frac{1}{\rho} + \frac{d^3z}{ds^3}ds + \frac{d^4z}{ds^4}\frac{ds^2}{2};$$

les coordonnées des points de la courbe sont d'ailleurs, en vertu des mêmes hypothèses, et en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$ds, \quad 0, \quad a,$$

en sorte que les équations de la normale principale sont

$$\frac{x - ds}{\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}} = \frac{y}{\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}} = \frac{z - a}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}}.$$

C'est dans ces équations que nous devons supposer $z = 0$, pour calculer les valeurs correspondantes de x et de y, qui sont

$$y = \frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 ds - a\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}},$$

$$x = \frac{-a\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}\right] - \frac{ds}{\rho} + ds^2\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0}{-\frac{1}{\rho} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}},$$

et il faut exprimer que le rapport

$$\frac{y}{x} = \frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}ds + \frac{d^4y}{ds^4}\frac{ds^2}{2}\right)}{-a\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 ds + \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 \frac{ds^2}{2}\right] - \frac{ds}{\rho} + ds^2\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)}$$

ne diffère de sa limite

$$\frac{-a\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{-a\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 - \frac{1}{\rho}}$$

que d'un infiniment petit du second ordre.

Or, en prenant la différence de ces deux expressions et égalant à zéro le coefficient ds, on trouve

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 + \frac{a}{2\rho}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 + a\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = 0,$$

et l'on en déduit

$$(c) \qquad a = \frac{-\frac{1}{2\rho}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 - \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{2}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}$$

Nous allons exprimer maintenant les coefficients différentiels qui entrent dans le second membre, en fonction de deux rayons de courbure de la courbe considérée, et de leurs dérivées.

On a, pour un point quelconque,

$$(d) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

En différentiant cette équation par rapport à s, il vient

$$-\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3};$$

et si l'on suppose $s = 0$, il vient, en vertu de l'équation (b),

$$(e) \qquad \frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds} = \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

On en déduit, par la différentiation,

$$(f) \qquad \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3} = 0,$$

et, en faisant dans cette dernière équation $s = 0$, il vient

$$(g) \qquad \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\rho^2}.$$

En différentiant l'équation (f) par rapport à s, on obtient la suivante :

$$(h) \quad 0 = 3\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + 3\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} + 3\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3} + \frac{dx}{ds}\frac{d^4x}{ds^4} + \frac{dy}{ds}\frac{d^4y}{ds^4} + \frac{dz}{ds}\frac{d^4z}{ds^4},$$

et, en faisant $s = 0$, il vient

$$-\frac{3}{\rho}\frac{d^3z}{ds^3} + \frac{d^4x}{ds^4} = 0;$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à l'équation (g),

$$(i) \qquad \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 = \frac{3}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds}.$$

Pour déterminer les autres coefficients différentiels qui figurent dans l'expression de la longueur a, considérons l'expression de la seconde courbure de la ligne considérée. On a, en désignant par R le rayon de seconde courbure,

$$(k) \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3}\right) + \frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3}\right) + \frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3z}{ds^3} - \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3}\right)}{\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Si l'on fait dans cette équation $s = 0$, il vient

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{\rho}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{\rho^2}} = \rho\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0,$$

d'où

$$(l) \qquad \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = \frac{1}{R\rho}.$$

Si nous différentions enfin la valeur de $\frac{1}{R}$ par rapport à s, et que,

dans le résultat, nous supposions $s = 0$, il viendra facilement

$$-\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 = \frac{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 + \frac{2}{\rho^3}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0}{\frac{1}{\rho^4}},$$

et l'on en déduit, en ayant égard aux équations précédentes,

$$(m)\qquad \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 = -\frac{1}{R^2\rho}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 + \frac{2}{R\rho}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

En substituant dans les valeurs de (a) les expressions des coefficients différentiels qui y figurent et qui sont données par les équations (e), (g), (c), (l), (m), il vient

$$a = \frac{\frac{1}{R^2\rho^2}\frac{dR}{ds}}{\frac{1}{R^2\rho^3}\frac{dR}{ds} - \frac{1}{R\rho^4}\frac{d\rho}{ds}},$$

ou, en chassant le dénominateur, et supprimant les facteurs communs,

$$\left(\frac{a}{R\rho} - \frac{1}{R}\right)\frac{dR}{ds} = \frac{a}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{dR} = \frac{a\rho - \rho^2}{Ra},$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho(a-\rho)} = \frac{1}{a}\frac{dR}{R},$$

et, en intégrant,

$$\frac{C\rho}{a-\rho} = CR,$$

$$C\rho = aCR - \rho CR,$$

ou, enfin, en divisant par ρR,

$$(n)\qquad 1 = \frac{a}{\rho} - \frac{C}{R}.$$

Telle est la relation fort simple qui doit exister entre les deux rayons de courbure d'une courbe pour que les normales principales soient en même temps normales principales d'une autre courbe. Si l'on suppose la constante arbitraire C égale à zéro, il vient

$$\rho = 0.$$

Les courbes dont le rayon de courbure est constant satisfont donc à la condition générale, et la longueur qu'il faut porter sur les rayons de courbure pour obtenir la seconde courbe dont ils sont aussi les normales principales, est précisément égale à ce rayon de courbure constant, en sorte que la seconde courbe est le lieu des centres de la courbure de première. Cette dernière proposition a déjà été remarquée par M. Bouquet.

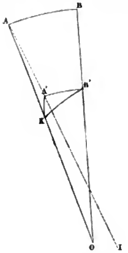
VI.

Indépendamment de la relation

$$\frac{a}{\rho} - \frac{C}{R} = 1,$$

qui a lieu entre les deux courbures de l'une des courbes dont les normales principales sont aussi normales principales d'une autre courbe, on peut en obtenir deux autres qui permettent d'exprimer les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes en fonction de ceux de l'autre.

Nommons, en effet, ds_1, ρ_1, R_1 l'arc infiniment petit AB de l'une



de nos courbes et les deux rayons de courbure. Soient ds_2, ρ_2, R_2, l'arc correspondant A'B' de la seconde courbe et ses deux rayons de courbure; désignons enfin par a la distance constante qui sépare les points correspondants des deux courbes.

Si BO est la direction du rayon de courbure en B, O le centre de courbure, AI la direction du rayon de courbure en A, l'angle A'AO, que forme AA' avec le plan osculateur OBA, est précisément l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la courbe AB; il est égal à $\frac{ds_1}{R_1}$. L'angle AOB est l'angle de contingence égal à $\frac{ds_1}{\rho_1}$.

Or, en désignant par x l'arc B'K décrit du point O comme centre, et compris entre OB et OA, on a

$$ds_1 : x :: \rho_1 : \rho_1 - a.$$

Mais, dans le triangle rectangle A'KB',

$$x^2 = \mathrm{A'B'}^2 - \overline{\mathrm{A'K}}^2 = ds_2^2 - a^2 \frac{ds_1^2}{R_1^2}:$$

d'où

$$ds_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - a} \sqrt{ds_2^2 - a^2 \frac{ds_1^2}{R_1^2}}.$$

On aurait de même

$$ds_2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 + a} \sqrt{ds_1^2 - a^2 \frac{ds_2^2}{R_2^2}},$$

ou

$$1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - a} \sqrt{\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2 - \frac{a^2}{R_1^2}},$$

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\rho_2}{\rho_2 + a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_2^2} \left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2}.$$

D'ailleurs, si l'on nomme θ l'angle de deux rayons de courbure infiniment voisins, il est facile de voir que l'on a

$$\theta^2 = ds_1^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{R_1^2}\right) = ds_2^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{R_2^2}\right):$$

d'où l'on conclut

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{R_2^2}}};$$

et, par suite, les équations précédentes deviennent

$$1 = \frac{\rho_1^2}{(\rho_1 - a)^2}\left[\frac{\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}} - \frac{a^2}{R_1^2}\right],$$

$$\frac{\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}} = \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 + a)^2}\left[1 - \frac{a^2}{R_2^2}\frac{\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)}{\left(\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)}\right]$$

Telles sont les deux équations qui permettent de calculer ρ_1 et R_1 en fonction de ρ_2 et R_2.

Dans le cas particulier où ρ_1 est constant et égal à a, les équations deviennent

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}} = \frac{a^2}{R_1^2},$$

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{R_1^2}}{\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}} = \frac{\rho_2^2}{(\rho_2 + a)^2}\left[1 - \frac{a^2}{R_2^2}\frac{\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{R_1^2}\right)}{\left(\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)}\right];$$

et l'on en déduit sans peine,

$$\rho_2 = -a,$$

$$R_2 = \frac{a^2}{R_1}.$$

Addition au Mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes, inséré dans le volume précédent [*];

Par M. A. CAYLEY.

Je me propose de résumer ici la théorie des courbes du quatrième ordre, auxquelles donne lieu la première de mes méthodes de transmutation appliquée à une conique quelconque.

L'équation d'une telle courbe est de la forme

$$ax + by + cz + 2f\sqrt{yz} + 2g\sqrt{zx} + 2h\sqrt{xy} = 0,$$

et nous avons déjà vu que cette courbe a pour tangentes doubles les trois droites $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (droites que nous avons représentées par QR, RP, PQ). Pour trouver les autres propriétés de la courbe, mettons l'équation sous la forme

$$\begin{gathered}\left(a - \frac{gh}{f}\right)x + \left(b - \frac{hf}{g}\right)y + \left(c - \frac{fg}{h}\right)z \\ + \left(\sqrt{\frac{gh}{f}}\sqrt{x} + \sqrt{\frac{hf}{g}}\sqrt{y} + \sqrt{\frac{fg}{h}}\sqrt{z}\right)^2 = 0.\end{gathered}$$

Puis, en écrivant, pour plus de simplicité, $\frac{fx}{gh}$, $\frac{gy}{hf}$, $\frac{fz}{gh}$ au lieu de x, y, z, cette équation devient

$$\left(\frac{af}{gh} - 1\right)x + \left(\frac{bg}{hf} - 1\right)y + \left(\frac{ch}{fg} - 1\right)z + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = 0;$$

et de là, en mettant

$$\left(\frac{af}{gh} - 1\right)x + \left(\frac{bg}{hf} - 1\right)y + \left(\frac{ch}{fg} - 1\right)z = -w,$$

l'équation de la courbe prend cette forme très-simple

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w} = 0,$$

[*] *Voir* le tome XIV, page 40.

en se souvenant toujours que les quantités x, y, z, w satisfont à l'équation linéaire qui vient d'être donnée. Je représenterai dans la suite cette équation linéaire par

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0.$$

Il est évident que la droite $w = 0$, de même que les droites QR, RP, PQ, est tangente double de la courbe. De plus, ces quatre droites sont le système complet des tangentes doubles, car la courbe a, comme nous allons le voir, trois points doubles. En effet, la forme rationnelle de l'équation est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xw - 2yw - 2zw)^2 - 64\, xyzw = 0,$$

et, au moyen de l'identité

$$(x+y)^2(z+w)^2 - 16\, xyzw = (x-y)^2(z+w)^2 + (x+y)^2(z-w)^2 - (x-y)^2(z-w)^2,$$

cette équation rationnelle se transforme en

$$[(x-y)^2 - (z-w)^2]^2 - 4(x+y-z-w)[(x+y)(z-w)^2 - (z+w)(x-y)^2] = 0,$$

laquelle fait voir que le point $(x=y,\ z=w)$ est un point double; de là aussi les points $(x=z,\ w=y)$, $(x=w,\ y=z)$ sont des points doubles. Remarquons en passant qu'en supposant que les coefficients α, β, γ, δ restent indéterminés, les droites $x=y$, $x=z$, $x=w$ seront des droites quelconques par les points $(x=0,\ y=0)$, $(x=0,\ z=0)$, $(x=0,\ w=0)$ respectivement, et ces droites une fois connues, les droites $y=z$, $z=w$, $w=y$ seront déterminées, la première au moyen des points $(y=0,\ z=0)$, $(y=x,\ z=x)$, la deuxième au moyen des points $(z=0,\ w=0)$, $(z=x,\ w=x)$, et la troisième au moyen des points $(w=0, y=0)$, $(w=x,\ y=x)$; et les trois droites ainsi déterminées se couperont nécessairement en un même point. Cela revient au théorème suivant :

« Les trois points doubles d'une courbe du quatrième ordre avec » trois points doubles sont les centres d'un quadrangle dont les côtés

» passent par les angles du quadrilatère fourni par les tangentes » doubles de la courbe. »

Cette propriété des courbes du quatrième ordre dont il s'agit (je veux dire celle d'avoir trois points doubles) aurait dû faire partie du théorème général donné auparavant pour cette première méthode de transmutation.

En supposant que la conique à transmuter passe par le point P, on aura

$$\alpha + \delta = 0,$$

et il suit de là que le point double ($x = w$, $y = w$), identique dans ce cas avec le point P, se change en point de rebroussement, et en même temps les droites PQ, PR ne sont plus des tangentes doubles proprement dites, mais ces droites sont des tangentes simples qui passent par le point de rebroussement. Ajoutons que la tangente dans le point de rebroussement est la droite $x = w$.

En supposant que la conique à transmuter passe à la fois par les deux points P, Q, nous aurons

$$\alpha + \delta = 0, \quad \beta + \delta = 0.$$

Ici les deux points doubles ($x = w$, $y = z$), ($y = w$, $x = z$), identiques dans ce cas avec les points P, Q, deviennent des points de rebroussement, les droites QR, RP, PQ ne sont plus des tangentes doubles proprement dites, mais les droites RP, PQ sont les tangentes simples qui passent par les points de rebroussement respectivement, et la droite PQ est la droite menée par les deux points de rebroussement. Ajoutons que les tangentes dans les deux points de rebroussement respectivement, sont les droites $x = w$ et $y = w$.

On sait qu'un cercle quelconque peut s'envisager comme conique qui passe par deux points fixes, savoir, les points où l'infini, considéré comme droite, est rencontré par les deux droites imaginaires auxquelles se réduit un cercle évanouissant quelconque. En nommant ces droites les *axes imaginaires* de leur point d'intersection, prenons pour les droites PQ, PR les axes imaginaires d'un point quelconque P, et pour la droite QR l'infini. Cela étant, un cercle quelconque sera transmuté dans une courbe du quatrième ordre ayant deux points de

rebroussement aux points où l'infini est rencontré par les axes imaginaires du point P, ou, ce qui est la même chose, d'un point quelconque, et ayant de plus un point double. Et le point P, comme point d'intersection de deux axes imaginaires tangents de la courbe, est un foyer de la courbe (*voyez* le Mémoire de M. Plücker : *Ueber solche puncte die bei curven hohern ordnung als der zweiten den brenn puncten der kegelschnitte entsprechen*, Journal de M. Crelle, tome X, page 84). Cela suffit pour faire voir que la courbe est un limaçon de Pascal ayant le point P pour le foyer qui n'est pas le point double. En effet, prenant pour vrai le théorème : « Les ovales » de Descartes ont deux points de rebroussement aux points où » l'infini est rencontré par les axes imaginaires d'un point quel- » conque [*], » comme cela revient à huit conditions, et qu'un ovale de Descartes peut être déterminé de manière à satisfaire à six conditions (ce qui fait en tout quatorze conditions, nombre des conditions qui déterminent une courbe du quatrième ordre), toute courbe du quatrième ordre avec deux points de rebroussement, tels que nous venons de les mentionner, sera un ovale de Descartes, et si, de plus, la courbe du quatrième ordre a un point double, elle se réduira en limaçon (cas particulier, comme on sait, des ovales de Descartes). Donc, en résumé, tout cercle est transmuté dans un limaçon ayant un point fixe pour le foyer qui n'est pas le point double, théorème qui se rapporte à la méthode de M. Roberts pour le cas $n = \frac{1}{2}$. L'on doit cependant remarquer que cette méthode est due à M. Chasles. En effet, on trouve dans la Note citée de l'*Aperçu historique*, non-seulement la propriété des droites de se transmuter en des paraboles, mais aussi celle des cercles de se transmuter en des ovales de Descartes (seulement M. Chasles paraît ne pas avoir remarqué que ces ovales étaient nécessairement des limaçons), et c'est la lecture de cette Note qui m'a appris cette théorie de la transmutation des cercles.

En supposant que la conique à transmuter passe par les trois points

[*] M. Chasles a remarqué en passant (Note XXI de l'*Aperçu historique*) que les ovales de Descartes ont deux points conjugués imaginaires à l'infini, théorème moins complet que celui que je viens d'énoncer. Pour la démonstration du théorème complet, *voyez* la Note à la suite de ce Mémoire.

P, Q, R, nous aurons

$$\alpha + \vartheta = 0, \quad \beta + \vartheta = 0, \quad \gamma + \vartheta = 0;$$

les points doubles identiques, dans ce cas, avec les points P, Q, R, deviennent des points de rebroussement, et les droites QR, RP, PQ, au lieu d'être des tangentes doubles, sont tout simplement les droites qui passent chacune par deux points de rebroussement. Ajoutons que les tangentes de la courbe, dans les trois points de rebroussement respectivement, sont les droites $x - w = 0$, $y - w = 0$, $z - w = 0$.

Il y a encore un cas particulier à considérer, savoir celui où la conique à transmuter est telle que, par rapport à cette conique, les points Q et R sont situés chacun dans la polaire de l'autre; on a alors $f = 0$, cas qui échappe à l'analyse ci-devant employée. On voit sans peine que les deux points doubles ($y = w$, $x = z$), ($z = w$, $y = z$) deviennent ici identiques, ce qui donne lieu à un point d'osculation. La droite QR et la droite $w = 0$ ne sont plus des tangentes doubles proprement dites, mais ces droites deviennent l'une et l'autre identiques avec la tangente dans le point d'osculation.

Note sur les ovales de Descartes.

De l'équation de ces ovales,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = m\sqrt{x^2 + y^2} + n,$$

on tire d'abord

$$(1 - m^2)(x^2 + y^2) - 2ax + a^2 - n^2 = 2mn\sqrt{x^2 + y^2},$$

puis

$$\begin{aligned}&(1 - m^2)^2 (x^2 + y^2)^2 - 4a(1 - m^2)x(x^2 + y^2) \\ &+ 2[a^2(1 - m^2) - n^2(1 + m^2)](x^2 + y^2) \\ &+ 4a^2x^2 - 4a(a^2 - n^2)x + (a^2 - n^2)^2 = 0.\end{aligned}$$

Pour trouver la nature de la courbe à l'infini, mettons $x + yi = \xi$, $x - yi = \eta$, $i = \sqrt{-1}$, et introduisons la quantité ζ de manière à rendre l'équation homogène. Cela donne

$$\begin{aligned}&(1 - m^2)^2 \xi^2\eta^2 - 2a(1 - m^2)(\xi + \eta)\xi\eta\zeta \\ &+ 2[a^2(1 - m^2) - n^2(1 + m^2)]\xi\eta \\ &+ a^2(\xi + \eta)^2\zeta^2 - 2a(a^2 - n^2)(\xi + \eta)\zeta^2 + (a^2 - n^2)^2\zeta^4 = 0.\end{aligned}$$

Ce qui fait voir, sans la moindre peine, qu'il y a des points de rebroussement aux points $(\xi = 0, \zeta = 0)$, $(\eta = 0, \zeta = 0)$, savoir, aux points où l'infini, considéré comme droite, est rencontré par les droites $x + yi = 0$, $x - yi = 0$, qui sont les axes imaginaires du point $x = 0, y = 0$.

Nous pouvons remarquer, en passant, que l'équation

$$(1 - m^2)(x^2 + y^2) - 2ax + (a^2 - n^2) = 2mn\sqrt{x^2 + y^2},$$

conduit, avec beaucoup de facilité, à une autre propriéte, donnée par M. Chasles dans la Note déjà citée. En effet, en mettant

$$a' = \frac{n^2 - a^2}{a(m^2 - 1)}, \quad m' = \frac{m^2(n^2 - 1)}{a(m^2 - 1)}, \quad n' = \frac{n}{a},$$

cette équation se transforme en

$$(1 - m'^2)(x^2 + y^2) - 2a'x + (a'^2 - n'^2) = 2m'n'\sqrt{x^2 + y^2},$$

et par là on voit que l'équation primitive peut se transformer en

$$\sqrt{(x - a')^2 + y^2} = m'\sqrt{x^2 + y^2} + n',$$

c'est-à-dire, il y a toujours un troisième foyer de la courbe.

Il ne reste qu'à démontrer que la transformée (selon la méthode de M. Chasles) d'un cercle est toujours un limaçon. Soit, pour cela,

$$r^2 - 2ar\cos\theta + \delta = 0$$

l'équation du cercle; en mettant $\sqrt{mr}$ au lieu de r, et $\frac{1}{2}\theta$ au lieu de θ, cette équation devient $mr - 2a\sqrt{mr}\cos\frac{1}{2}\theta + \delta = 0$, ce qui donne $(mr + \delta)^2 = 2a^2 mr(1 + \cos\theta)$, ou, en mettant $r\cos\theta = x$ et réduisant à une forme rationnelle,

$$[m^2(x^2 + y^2) + \delta^2 - 2a^2 mx]^2 - 4m^2(\delta - a^2)(x^2 + y^2) = 0,$$

ce qui appartient évidemment à un ovale de Descartes. En mettant $y = 0$, l'équation devient

$$[m^2 x^2 + 2m(\delta - 2a^2)x + \delta^4](mx - \delta)^2 = 0,$$

c'est-à-dire le point $mx - \delta = 0$, $y = 0$ est point double, ou la courbe est le limaçon de Pascal.

NOTICE SUR A. GÖPEL;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Journal de M. Crelle, tome XXXV, page 313. — Traduit de l'allemand.)

M. Adolphe Göpel, docteur en Philosophie, et l'un des employés de la bibliothèque royale de Berlin, a succombé à une maladie courte, mais douloureuse, peu de semaines après avoir livré à la publication un remarquable Mémoire intitulé : *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis.* Dans les heures de loisir que lui laissait son emploi, il se livrait à de profondes recherches mathématiques, et si quelquefois il cherchait d'autres distractions, c'était à la musique qu'il les demandait, art dans lequel il avait un talent distingué. Vivant dans la retraite la plus complète, il paraissait fuir la société des savants de son ordre, qui ne connurent guere le génie qui était au milieu d'eux qu'en apprenant la perte qu'ils venaient d'en faire. Moi-même je n'ai jamais vu Göpel.

Göpel nous apprend les phases de sa jeunesse dans l'appendice, *Curriculum vitæ,* qu'il a joint à sa dissertation pour le doctorat. Son pere, originaire de Saxe, était maître de musique de Rostock, où Göpel naquit en septembre 1812. Son oncle maternel, qui était consul anglais en Corse, le prit avec lui à l'âge de dix ans et l'emmena en Italie Pendant ses divers séjours dans plusieurs villes italiennes, il s'instruisit, par les soins de son oncle, dans les principes des sciences. A Pise, durant deux années, il suivit les Cours des professeurs *Pieraccioli, Poletti, Gerbi* et *Gatteschi* sur l'Algèbre, le Calcul différentiel, la Statique et la Mécanique analytique, et enfin la Physique expérimentale et théorique. En 1827, il retourna à Rostock, sa ville natale, et fréquenta les classes élevées du Gymnase de ce lieu. De là il vint à l'Université de Berlin. Il s'empressa de profiter des ressources qu'on y trouve pour la culture de l'esprit, et outre les Cours

de mathématiques, de physique et de chimie, il suivit encore les leçons de philosophie, de philologie, d'histoire et d'esthétique. Après avoir terminé ses études universitaires, il s'adonna spécialement aux mathématiques, et, comme beaucoup de ceux qui sont propres aux recherches de mathématiques pures, il se sentit attiré surtout vers la théorie des nombres. Dans sa thèse : *De æquationibus secundi gradus indeterminatis*, soutenue à l'Université de Berlin pour le grade de docteur, laquelle comprend une feuille et demie, il montra de quelle grande perspicacité il était doué pour l'étude des nombres et de quelle aptitude pour les profondes recherches. Cette dissertation remarquable n'étant pas connue du public, je vais donner ici un aperçu des résultats qu'elle contient.

Quand on réduit la racine carrée d'un nombre premier A de la forme $4n+1$ en fraction continue, la période symétrique des dénominateurs contient, comme on sait, *deux termes moyens égaux*. Soient

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

les quotients complets qui y correspondent; Legendre a démontré que

$$D = D', \quad A = I'^2 + D^2,$$

en sorte que l'on arrive, par la réduction de la racine carrée du nombre premier A en fraction continue, à sa décomposition en une somme de deux carrés. Ce résultat remarquable était jusqu'ici unique dans son genre. Par des considérations plus avancées, Göpel a trouvé que A étant un nombre premier $4n+3$ ou le double d'un tel nombre, la décomposition de A sous la forme $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ s'effectue aussi par le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue. En effet, supposons d'abord A un nombre premier de la forme $8n+3$, ou le double d'un tel nombre, on arrive toujours, par le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue, à trois quotients complets consécutifs

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

tels que l'on ait

$$D = \frac{1}{2}D^0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}D' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(D^0 + D');$$

dans les deux premiers cas on a

$$A = I^2 + 2D^2,$$

et dans le troisième

$$A = \frac{1}{4}(I - I')^2 + 2D^2 = \frac{1}{16}(D^0 - D')^2 + 2D^2,$$

où $I - I'$ est divisible par 2, et $D^0 - D'$ divisible par 4.

Quand, au contraire, A est un nombre premier de la forme $8n + 7$, ou le double d'un tel nombre, on arrive toujours, par le développement de A en fraction continue périodique, à deux quotients complets consécutifs

$$\frac{\sqrt{A} + I^0}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A} + I}{D},$$

pour lesquels

$$D + D^0 = 2I,$$

ce qui donne

$$A = 2I^2 - \frac{1}{4}(D - D^0)^2,$$

où $D - D^0$ est toujours un nombre pair.

J'ai construit, avec l'aide des Tables de Degen, la Table suivante, qui montre pour les nombres premiers de la forme $8n + 3$ ou leurs doubles lequel a lieu des trois cas distingués par Göpel, $D = \frac{1}{2}D^0$, $D = \frac{1}{2}D'$, $D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$:

$D = \frac{1}{2}D^0$; 3, 6, 11, 22, 38, 43, 59, 83, 131, 139, 179, 211, 214, 227, 262, 278, 283, 326, 379, 419, 443, 467, 491, 502, 547, 619, 659, 683, 694, 739, 787, 811, 827, 838, 971, 998;

$D = \frac{1}{2}D'$; 67, 86, 118, 307, 331, 358, 422, 523, 563, 566, 571, 614, 643, 662, 691, 859, 934, 947;

$D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$; 19, 107, 134, 163, 166, 251, 347, 454, 499, 587, 758, 883, 886, 907, 982.

Il est à remarquer qu'au moins parmi ces nombres tous au-dessous de 1000, la plus grande partie est comprise dans le premier cas. En effet, sur soixante-neuf, trente-six sont dans le premier cas, dix-huit dans le deuxième, quinze dans le troisième. Pour les nombres premiers de la forme $8n + 7$ et leurs doubles, il faut distinguer de même les deux cas de $D^o > D$ et de $D > D^o$.

Après ce premier travail, Göpel n'a rien publié dans un espace de douze ans, à l'exception de plusieurs opuscules moins importants, mais encore remarquables, qu'il écrivit à l'occasion de la correction du Journal de mathématiques édité par Grunert, à Greifswald. Dans l'un d'eux, il prouve que, dans une équation

$$\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q},$$

où x, y, p, n, P, Q représentent des nombres entiers, p étant différent de 1, et x, y, p n'ayant pas de communs diviseurs, toujours on a $p = 2$, $n = 3$ ou un multiple de 3, x impair, et y de la forme $8n + 5$.

Ces compositions montrent que Göpel était parfaitement habile dans l'emploi des méthodes synthétiques de Steiner; et l'on doit présumer que, parmi les papiers qu'il a laissés, on trouvera d'autres Mémoires, plus ou moins ébauchés, d'une étendue plus considérable.

Le Mémoire dont nous avons parlé précédemment, et qu'il termina peu de temps avant sa mort, aborde une partie élevée et abstraite de l'analyse, et donne la solution d'un des plus beaux problèmes que les mathématiques actuelles aient posés : *Donner une expression des fonctions inverses des intégrales abéliennes de première espèce.* Par une heureuse inspiration, Göpel généralise d'une manière naturelle les séries simples Θ, auxquelles j'ai ramené les fonctions elliptiques, et il trouve que ces séries généralisées donnent les coefficients de l'équation quadratique dont les deux racines dans ma théorie des fonctions ultra-elliptiques sont les fonctions inverses simultanées de deux sommes d'intégrales. Le moyen simple qui l'amène à ce résultat est la multiplication de deux séries généralisées, procédé que j'ai employé moi-même pour les fonctions Θ (tome III du *Journal de Mathématiques*, page 305). Enfin, on reconnaît la main d'un maître quand

Göpel met, par une substitution convenable, sans être effrayé de leur complication, les équations différentielles auxquelles il arrive sous la forme que j'ai donnée aux systèmes d'équations différentielles ultra-elliptiques, et complète ainsi la solution du problème proposé.

Mais Göpel n'est pas le seul qui se soit occupé avec succès de cette belle question. Dicté par une même inspiration heureuse, un autre travail plus étendu que le sien conduit, quoique par un chemin différent, et peut-être plus simple, aux mêmes résultats. Ce Mémoire est déposé, je crois, depuis le mois d'octobre de l'année dernière dans une célèbre Académie [*]. La substance m'en a été communiquée il y a trois ans par l'auteur, et depuis par moi-même à plusieurs de mes honorables amis.

Je remarque encore que les considérations de Göpel sur les secondes différentielles, tout à fait superflues pour le but actuel de ce traité, ainsi que ces paroles expresses, page 297 : *Quas ad secundam speciem nostrarum fonctionum facere* INFRA *videbis*, et page 268 : *Quam* INFRA *ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis*, font allusion à des recherches qui devaient se trouver plus loin dans son Mémoire, mais qu'on regrette de ne pas y rencontrer. Peut-être ses papiers les contiennent-ils, et peut-être aussi y trouvera-t-on la preuve de cette assertion, qui paraît hasardée, savoir, qu'une pareille méthode s'applique à toutes les transcendantes qui ressortent de l'intégration des quantités algébriques. Il serait donc possible, comme le pense l'auteur, d'étendre ses résultats aux intégrales dans lesquelles la fonction sous le radical carré dépasse le sixième degré, et où le nombre des constantes contenues dans les séries ne concorde plus, comme dans les fonctions elliptiques et abéliennes de première espèce, avec le nombre des modules.

Bien qu'il ne fût plus dans la première jeunesse, comme Galois et Abel, A. Göpel a été frappé par la mort beaucoup trop tôt. Ce talent remarquable a été arrêté au milieu de ses nobles travaux, et cepen-

[*] M. Jacobi fait sans aucun doute allusion ici au Mémoire de M. G. Rosenhain, de Breslau, adressé en 1846 à notre Académie à l'occasion du grand prix pour la question des fonctions abéliennes que M. Rosenhain a en effet obtenu. (J. L.)

dant nous devons nous réjouir qu'il nous en soit resté un beau et durable monument. Avec l'habitude des Allemands de mûrir si longtemps leurs idées, et de n'oser qu'avec timidité les mettre au jour, il était à craindre que nous ne fussions privés entièrement du fruit des veilles de Göpel. Quelle cause l'a déterminé à hâter la publication de son Traité? Peut-être la Lettre que M. Hermite m'adressa, et dont il est parlé dans la préface; peut-être un sombre pressentiment du malheur qui le menaçait et que ces mots laissent apercevoir : *Quum magis quam optabam festinandum fuisset.*

Berlin, le 21 septembre 1847.

A la suite de cette Notice, M. Crelle ajoute quelques mots. Il montre combien dans A. Göpel l'homme, le savant et l'artiste étaient dignes d'estime. Il regrette de n'avoir pas été en mesure, à cause de l'abondance des matières, d'insérer plus tôt dans son Journal le travail que ce géomètre, peu de temps avant sa mort, avait bien voulu lui transmettre. Tout eût été sacrifié à cette publication, dit-il, si la moindre prévision de ce déplorable événement eût été possible. Il promet d'imprimer prochainement la dissertation dont M. Jacobi vient de donner un aperçu, et de l'accompagner d'un fac-simile de l'auteur. Enfin il annonce qu'il a l'espoir de trouver dans les papiers de Göpel d'autres travaux qui méritent l'attention des savants.

NOTE

Sur une nouveau procédé pour reconnaître immédiatement, dans certains cas, l'existence de racines imaginaires dans une équation numérique;

PAR M. FAA DE BRUNO.

THÉORÈME. *L'équation*

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx^2 + Sx + T = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont numériquement donnés, admet des racines imaginaires si

$$P^2 - 2Q < m\sqrt[m]{T^2}. \tag{2}$$

On sait, en effet, que A, B, C,... étant des quantités positives et m leur nombre, on a

$$A + B + C + \ldots > m\sqrt[m]{ABC\ldots},$$

c'est-à-dire que la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités est supérieure à leur moyenne géométrique [*]. Si donc les racines de l'équation (1) sont toutes réelles, et qu'on prenne pour A, B, C,... leurs carrés, ce qui donne

$$A + B + C + \ldots = P^2 - 2Q, \quad ABC\ldots = T^2,$$

on en conclura

$$P^2 - 2Q > m\sqrt[m]{T^2}.$$

L'inégalité (2) n'a donc jamais lieu quand l'équation (1) a toutes ses

[*] *Voyez* le *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

racines réelles, et si cette inégalité est vérifiée, on peut être assuré qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation proposée.

S'il arrive que $P^2 - 2Q$ soit plus grand que $m\sqrt[m]{T^2}$, on devra appliquer encore le même principe aux coefficients correspondants dans l'équation aux racines réciproques, et l'on trouvera quelquefois

$$(3) \qquad \frac{S^2}{T^2} - 2\frac{R}{T} < m\sqrt[m]{\frac{1}{T^2}},$$

ce qui rendra évidente l'existence de racines imaginaires, qui n'était point révélée par les coefficients P et Q. Lorsque les inégalités (2) et (3) n'auront pas lieu, on ne pourra rien conclure sur la réalité ou la non réalité des racines. Mais cet indice nouveau, combiné avec d'autres que l'on connaît déjà ou que l'on pourrait encore trouver en développant le principe indiqué ci-dessus, suffira, dans un grand nombre de cas, pour constater immédiatement et d'une manière très-simple la présence de racines imaginaires dans une équation.

RECHERCHES
SUR
LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. V. PUISEUX,
Maître de Conférences à l'École Normale.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Lorsqu'une fonction u d'une variable z réelle ou imaginaire est définie par une équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

il ne suffit pas d'attribuer à la variable une valeur particulière pour que la fonction soit complétement déterminée; car l'équation proposée fournira, en général, plusieurs valeurs de u pour chaque valeur de z : il faut encore faire connaître laquelle de ces valeurs on doit choisir, si l'on veut que la fonction u soit définie sans ambiguïté.

Soit, par exemple, l'équation

$$u^2 - z = 0$$

l'équation dont il s'agit; la valeur de z étant représentée par $re^{t\sqrt{-1}}$, où r est positif et t réel, les deux valeurs correspondantes de u seront $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, $-r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, en désignant par $r^{\frac{1}{2}}$ la valeur arithmétique de la racine carrée de r. Pour achever de définir la fonction, on pourrait convenir de prendre pour t un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et d'adopter constamment pour u l'une des deux formules écrites ci-dessus, $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, par exemple. Mais cette convention, qu'il serait

difficile d'étendre à des équations d'un degré quelconque, a encore cet inconvénient, que u devient alors une fonction discontinue de z. En effet, attribuons à cette variable les deux valeurs $re^{(\pi-\varepsilon)\sqrt{-1}}$, $re^{(-\pi+\varepsilon)\sqrt{-1}}$, qui différeront infiniment peu si ε désigne un infiniment petit positif; les valeurs correspondantes de u, savoir : $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\pi+\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, différeront d'une quantité finie et sensiblement égale à $2r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$.

2. On évitera cette discontinuité en définissant autrement la fonction u. Reprenons l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

dont nous pouvons supposer le premier membre entier en u et z; donnons à z une valeur initiale quelconque c, et, pour la valeur initiale b de u, choisissons une quelconque des racines de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

Concevons maintenant que z varie d'une manière continue à partir de la valeur c, et atteigne une autre valeur k; M. Cauchy a démontré (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les diverses valeurs de u varient en même temps d'une manière continue. Il y en aura donc une qui, d'abord égale à b, aura passé par degrés infiniment petits à une valeur déterminée h qu'elle atteindra pour $z = k$. Cette valeur de u sera pour nous une fonction de z, et, comme on le voit, une fonction continue; mais sa détermination, pour une valeur particulière de z, dépendra tout à la fois et de cette valeur même et de la série des valeurs par lesquelles z a passé à partir de sa valeur initiale.

Observons toutefois que la fonction cesserait d'être déterminée, si, en passant de la valeur c à la valeur k, z prenait une des valeurs qui font acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales. Mais ces dernières valeurs étant en nombre limité, il sera toujours possible d'éviter cette circonstance, quelles que soient les quantités c et k; car il y a une infinité de manières de faire passer une variable imaginaire d'une valeur à une autre.

De plus, il importe de remarquer que, selon la série de valeurs qu'on adoptera pour z, la fonction u pourra acquérir, pour $z=k$, telle ou telle valeur. La question qui va nous occuper, de déterminer la valeur de u pour une valeur quelconque de z, devra donc être posée comme il suit, si l'on veut qu'elle ait une solution unique :

« La fonction u satisfaisant à l'équation

$$f(u, z)=0,$$

» et ayant la valeur b pour $z=c$, assigner la valeur qu'elle acquiert
» pour $z=k$, en supposant connue la série des valeurs infiniment
» rapprochées par lesquelles z passe de la valeur c à la valeur k. »

M. Cauchy a montré combien est importante dans l'analyse, et particulièrement dans le calcul intégral, la considération des diverses manières dont une variable imaginaire peut passer d'une valeur à une autre. Afin de rendre plus sensible la marche d'une pareille variable, nous nous servirons de la représentation géométrique dont cet illustre analyste a tiré un si grand parti. Ayant fait $z=x+y\sqrt{-1}$, nous imaginerons un point Z dont x et y soient les coordonnées rectangulaires, de sorte qu'à chaque valeur de z répondra une position de Z, et réciproquement. Alors, en même temps que z variera de c à k par une série déterminée de valeurs, le point mobile Z passera du point C correspondant à $z=c$, au point K correspondant à $z=k$, en suivant un chemin déterminé. Le problème proposé ci-dessus reviendra donc à trouver la valeur qu'acquiert la fonction u, lorsque Z passe de C en K par un chemin donné [*].

3. Pour éclaircir par un exemple ces considérations générales,

---

[*] Ce chemin peut être ou une ligne droite, ou une ligne brisée, ou une ligne courbe, ou un assemblage quelconque de lignes droites et courbes. Il n'est assujetti qu'à former entre les points C et K un trait non interrompu.

revenons à l'équation

$$u^2 - z = 0.$$

De l'origine O des coordonnées comme centre, *fig.* 1, *Pl. I*, avec un rayon quelconque r, décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons, dans l'angle des coordonnées positives, les deux points C et K; appelons τ et θ les angles aigus COx, KOx, et supposons $\theta > \tau$; on aura, au point C,

$$z = re^{\tau\sqrt{-1}} = c,$$

et, au point K,

$$z = re^{\theta\sqrt{-1}} = k.$$

Pour une position quelconque du point Z sur le cercle, on aura

$$z = re^{t\sqrt{-1}},$$

et l'on pourra prendre l'angle τ pour valeur initiale de t, et la quantité $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}$ pour valeur initiale de u. Si, maintenant, on suppose que Z aille de C en K en décrivant l'arc CLK moindre que la demi-circonférence, l'angle t croîtra d'une manière continue de τ à θ, et la fonction u acquerra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}$. Mais si l'on fait décrire à Z l'arc CMK plus grand que la demi-circonférence, l'angle t décroîtra de τ à $\theta - 2\pi$, et la fonction u obtiendra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta - 2\pi}{2}\sqrt{-1}}$ égale et de signe contraire à la précédente. On voit donc bien que, dans notre manière d'envisager une fonction implicite, elle dépend non-seulement de la valeur de la variable z ou de la position du point Z, mais encore du chemin par lequel ce point y est arrivé à partir de sa position initiale.

4. En général, le premier membre $f(u, z)$ de l'équation proposée sera de la forme

$$Au^m + Bu^{m-1} + Cu^{m-2} + \ldots + Iu + K,$$

A, B,... K, désignant des fonctions entières de z qu'on peut supposer

n'avoir pas de diviseur commun. Nous admettrons aussi que cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction entière de u et de z, d'un degré moindre que m par rapport à u, qui divise $f(u, z)$: s'il y avait un pareil diviseur, l'équation proposée se partagerait en plusieurs autres irréductibles, à l'une desquelles satisferait la fonction dont nous nous occupons. Il suit de là que l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne pourra pas avoir de racines égales, quelle que soit z; car, si cela avait lieu, on sait qu'elle ne serait pas irréductible. Les valeurs de z qui lui feront acquérir des racines égales seront déterminées par une équation en z qui n'aura qu'un nombre limité de solutions : les points correspondants à ces valeurs seront donc en nombre limité et ne formeront pas une ligne continue.

5. Afin de définir d'une manière précise la fonction que nous voulons considérer, choisissons pour point de départ de Z un point C correspondant à la valeur c de z. Supposons que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

ait une ou plusieurs racines simples et finies. Appelons b_1 une pareille racine, et u_1 une fonction continue de z qui satisfasse à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et se réduise à b_1 lorsque le point Z part de la position C.

Concevons maintenant que Z aille du point C qui répond à $z = c$, au point K qui répond à $z = k$, en suivant une ligne CMK, *fig.* 2, telle que, pour aucun point de cette ligne, la fonction u_1 ne devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Au point K, u_1 acquerra une valeur h_1 qui sera une des racines de l'équation

$$f(u, k) = 0.$$

Je vais prouver, et c'est là une proposition fondamentale dans notre théorie, que cette valeur h_1 restera la même, si, les points C et K res-

tant fixes, la ligne CMK vient à se changer dans la ligne infiniment voisine CM'K.

En effet, regardons ces deux lignes comme parcourues en même temps par deux points mobiles Z et Z' qui partent ensemble de la position C, qui arrivent ensemble en K, et dont les positions simultanées M et M' soient toujours infiniment voisines. Appelons v_1 et v'_1 les valeurs simultanées de la fonction u_1 sur les deux lignes CMK, CM'K : puisque v_1 et v'_1 varient d'une manière continue quand les points Z et Z' se déplacent, il en sera de même de la différence $v_1 - v'_1$.

Observons maintenant que tout le long de la ligne CMK, la racine u_1 de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

n'est égale à aucune autre, et qu'ainsi on peut assigner une quantité finie Δ telle, que le module de la différence entre u_1 et une autre racine soit, le long de cette ligne, constamment supérieur à Δ. Pour les deux points M et M', les valeurs de z diffèrent infiniment peu, et, par conséquent, chacune des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

pour le point M', diffère infiniment peu de quelqu'une des racines de la même équation pour le point M. Il en résulte que le module de la différence $v_1 - v'_1$ est ou infiniment petit ou supérieur à Δ : mais cette différence est nulle au point C et varie d'une manière continue; il faut donc qu'elle reste toujours infiniment petite : par conséquent, elle est rigoureusement nulle en K, et la fonction u_1 acquiert en ce point la même valeur h_1, soit que Z y arrive par le chemin CMK ou par le chemin CM'K.

6. Concevons à présent qu'on altère graduellement la ligne CMK, les points C et K restant fixes; nous obtiendrons la proposition suivante :

Le point Z allant de C *en* K, fig. 3, *soit par le chemin* CMK, *soit par le chemin* CNK, *la fonction* u_1 *qui avait en* C *la valeur* b_1 *acquerra dans les deux cas la même valeur* h_1, *si l'on peut, en déformant la ligne* CMK, *la faire coïncider avec* CNK, *sans lui faire franchir*

aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

7. On peut faire coïncider le point K avec le point C, et alors on arrive au théorème suivant :

Le point Z étant supposé partir du point C *et revenir à ce même point en décrivant la ligne* CLMC, fig. 4, *la fonction u_1, qui avait au commencement la valeur b_1, reprendra à la fin la même valeur b_1, si l'on peut réduire la ligne fermée* CLMC *au seul point* C *sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

On doit observer que cette ligne fermée CLMC peut avoir une forme absolument quelconque, se couper elle-même, ou faire autour du point C un nombre quelconque de révolutions, pourvu que la condition exprimée dans l'énoncé du théorème soit remplie.

Par exemple, la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^m = z - a$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z, parti du point C, reviendra à ce même point, si la ligne qu'il a décrite peut se réduire au seul point C, sans franchir le point A qui répond à $z = a$.

Pareillement, la fonction u_1 définie par l'équation

$$(z - \mathrm{a})(z - \mathrm{a}')(z - \mathrm{a}'')\ldots u^m = (z - a)(z - a')(z - a'')\ldots,$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z reviendra à son point de départ C, si la ligne décrite par ce point peut se réduire au seul point C sans franchir les points A, A', A'',..., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., qui correspondent respectivement aux valeurs a, a', a'',..., a, a', a'', etc., de z.

Enfin, il en sera de même de la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

si la ligne fermée décrite par Z peut se réduire au seul point C sans

franchir aucun des deux points A et A′ qui répondent à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et à $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

8. Soit u_1 une fonction algébrique de z définie, comme précédemment, par la condition d'être continue, de satisfaire à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et de se réduire à la quantité b_1 pour $z = c$. La notation $\int_c^k u_1 dz$ désigne, comme on sait, la somme des produits des valeurs de la fonction u_1 par les accroissements infiniment petits que reçoit la variable z lorsque celle-ci passe de la limite inférieure c à la limite supérieure k. Or, on peut faire varier z de c à k, ou, ce qui est la même chose, faire passer le point Z de C en K d'une infinité de manières, et à chaque chemin CMK, *fig.* 5, suivi par le point Z répondra une valeur finie et déterminée de l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, pourvu qu'en aucun point de ce chemin la fonction u_1 ne devienne ni infinie, ni égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

On peut donc se demander comment varie l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, lorsque les points C et K, ainsi que la ligne CMK, viennent à changer infiniment peu. Cette ligne ne renfermant, par hypothèse, aucun point qui rende la fonction u_1 infinie ou racine multiple, il en sera de même de la ligne infiniment voisine C′M′K′, et l'on prouvera, comme au n° **5**, que, pour deux points infiniment voisins pris sur ces deux lignes, les valeurs de u_1 diffèrent infiniment peu L'accroissement de l'intégrale, lorsqu'on passe d'un de ces chemins à l'autre, peut donc être calculé par les regles du calcul des variations, qui donnent

$$\partial \int_c^k u_1 dz = \int_c^k (u_1 dz) = \int_c^k (u_1 d\partial z + \partial u_1 dz).$$

Mais le long de la ligne CMK, la dérivée $\frac{du_1}{dz}$ a constamment une va-

leur finie, comme on le voit par l'équation

$$\frac{df}{du_1}\frac{du_1}{dz}+\frac{df}{dz}=0,$$

où $\frac{df}{du_1}$ ne peut être nul tant que u_1 est une racine simple de l'équation

$$f(u,z)=0.$$

On aura donc

$$\delta u_1=\frac{du_1}{dz}\delta z,$$

d'où

$$\delta u_1\,dz=\frac{du_1}{dz}\delta z\,dz=du_1\,\delta z,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=\int_c^k(u_1\,d\delta z+du_1\,\delta z)=\int_c^k d(u_1\,\delta z),$$

ou bien, en appelant b_1 et h_1 les valeurs de u_1 aux points C et K,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=h_1\,\delta k-b_1\,\delta c.$$

9. On tire de cette équation plusieurs conséquences importantes. Supposons d'abord que les points C' et K' coïncident avec les points C et K; on aura

$$\delta c=0,\quad \delta k=0,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\,dz=0.$$

De là résulte le théoreme suivant :

L'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, prise le long de la ligne CMK, *ne changera pas de valeur, si, les points* C *et* K *restant fixes, cette ligne vient à se déformer, sans franchir toutefois aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u,z)=0.$$

10. Supposons ensuite que le point K coïncidant avec le point C,

le chemin CMK devienne une ligne fermée CLMC, *fig.* 4; on aura

$$\delta h = \delta c,$$

d'où

$$\delta \int_c^k u_1\, dz = (h_1 - b_1)\,\delta c.$$

Tant que le point C reste fixe, on a

$$\delta c = 0,$$

et, par suite,

$$\delta \int_c^k u_1\, dz = 0.$$

On conclut de là le théorème suivant :

L'intégrale $\int u_1 dz$, *prise à partir du point* C, *tout le long de la ligne fermée* CLMC, *garde la même valeur si, le point* C *restant fixe, cette ligne vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

11. On réduit encore à zéro le produit $(h_1 - b_1)\,\delta c$, en faisant $h_1 = b_1$, c'est-à-dire en supposant que la fonction u_1 reprend sa valeur initiale lorsque le point Z, parti du point C, revient à ce même point. On a donc ce théorème :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, que la fonction* u_1 *reprenne sa valeur après une révolution du point* Z, *l'intégrale* $\int u_1 dz$, *prise tout le long de cette ligne, ne changera pas si l'on vient à la déformer sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

En combinant ce théorème avec celui du nº **7**, on obtient encore la proposition suivante :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, qu'on puisse la réduire au seul point* C *sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0,$$

l'intégrale $\int u_1 dz$, *prise tout le long de cette ligne, sera égale à zéro.*

12. Lorsque la fonction u_1 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée CLMC, l'intégrale $\int u_1 dz$ prise tout le long de cette ligne est indépendante du point C qu'on y prend pour origine de l'intégrale. En effet, la ligne CLMC restant la même, si le point C vient à se déplacer sur cette ligne, δc ne sera pas zéro; mais, comme on a, par hypothèse,

$$h_1 = b_1,$$

la variation de l'intégrale $\int u_1 dz$ sera nulle.

Il n'en est plus de même évidemment, lorsque la fonction ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée; car alors la différence $h_1 - b_1$ cesse d'être nulle.

13. Je crois devoir répéter l'observation déjà faite au n° **7**, que la ligne fermée dont il vient d'être question n'est pas nécessairement le contour extérieur d'une aire limitée, comme serait une circonférence ou une ellipse, mais qu'elle peut se couper elle-même comme une lemniscate, et cela un nombre quelconque de fois. Il peut se faire encore qu'une même partie de cette ligne soit parcourue deux ou plusieurs fois dans une révolution accomplie par le point Z. Par exemple, on pourrait la composer des deux circonférences CLAM, BNP, *fig.* 6, et de la droite AB, une révolution du point Z consistant à décrire successivement l'arc CLA, la droite AB, la circonférence BNP, la droite BA, et enfin l'arc AMC. L'habitude où l'on est d'entendre par *ligne fermée* un contour qui ne se coupe pas lui-même me fait insister sur ces remarques, afin qu'on ne restreigne pas inutilement l'étendue des théorèmes précédents [*].

---

[*] Les théorèmes des n^{os} **9**, **10**, **11** ont été donnés par M. Cauchy dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, année 1846. Seulement l'illustre géomètre caractérise les points que le chemin parcouru ne doit pas franchir en disant que, pour ces points, la fonction devient discontinue : comme je me borne ici aux fonctions algébriques, j'ai cru donner plus de précision aux énoncés et aux démonstrations en disant que les points dont il s'agit sont ceux pour lesquels la fonction u devient infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

14. Sans rien changer aux démonstrations, on peut, dans les propositions qui viennent d'être établies, substituer à u_1 une fonction rationnelle de u_1 et de z, pourvu qu'elle ne devienne pas infinie le long du chemin suivi par le point Z. De là nous pouvons conclure le développement de u_1 en série.

Soient a, a', a'', etc., les valeurs de z pour lesquelles l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies : nommons A, A', A'', etc., les points correspondants; joignons le point de départ C de Z aux points A, A', A'', etc., par des droites, et appelons ρ une quantité positive moindre que la plus petite des longueurs CA, CA', CA'', etc. Du centre C, avec un rayon égal à ρ, décrivons un cercle σ qui ne renfermera aucun des points A, A', A'', etc.

Considérons un point intérieur à ce cercle ou situé sur la circonférence : la fonction u_1 peut acquérir en ce point diverses valeurs, suivant que le point Z, parti de C, y arrive par tel ou tel chemin; mais si l'on assujettit ce chemin à ne pas sortir du cercle σ, la fonction u_1 ne pourra plus prendre au point dont il s'agit qu'une seule valeur parfaitement déterminée; car tous les chemins assujettis à cette condition se réduisent les uns aux autres sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. Nous nommerons $\varphi(z)$ cette valeur de la fonction u_1, et c'est elle que nous allons développer en série, en suivant la méthode expliquée par M. Cauchy dans divers Mémoires.

Pour cela, nous prendrons dans l'intérieur du cercle σ un point quelconque Γ; soit γ la valeur correspondante de z. L'expression

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie, tant que le point Z ne sortira pas du cercle σ; car, pour $z = \gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\varphi'(\gamma)$. Comme d'ailleurs cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la circonférence du cercle σ, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}\, dz,$$

prise tout le long de cette ligne, sera, d'après le n° **11**, égale à zéro.

On aura donc l'équation

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

les intégrales étant toujours prises le long de la circonférence σ.

Mais l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ peut être réduite, en vertu du n° **11**, à la même intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, prise le long d'une autre circonférence décrite du centre Γ avec un très-petit rayon ε. Sur cette dernière, on peut faire

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul, de sorte qu'on ait

$$dz = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{-1}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma}.$$

Observons maintenant que sur la circonférence σ le module ρ de $z-c$ est supérieur à la distance $C\Gamma$, ou, ce qui est la même chose, au module de $\gamma - c$: l'expression

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{\gamma-c}{z-c}}$$

peut donc être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{\gamma-c}{z-c}$, et l'on a

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} + \frac{\gamma-c}{(z-c)^2} + \frac{(\gamma-c)^2}{(z-c)^3} + \ldots.$$

On en conclut

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma-c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} + (\gamma-c)^2\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente. On a donc enfin l'équation

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma - c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} \\ \displaystyle + (\gamma - c)^2 \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots \end{array}\right],$$

qui donne le développement de $\varphi(\gamma)$ en série convergente suivant les puissances croissantes de $\gamma - c$.

15. L'existence de ce développement une fois démontrée, on pourra en calculer les coefficients par le théorème de Taylor, qui donnera

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1.2}(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On a dans cette équation

$$\varphi(c) = b_1;$$

si, de plus, on appelle $F_1(u, z)$, $F_2(u, z)$, etc., les valeurs de $1 . \frac{du}{dz}$, $1 . 2 . \frac{d^2u}{dz^2}$, etc., tirées des équations

$$\frac{df}{du}\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{df}{du}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dz}\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0, \ldots,$$

les quantités $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1.2}$, etc., auront pour valeurs $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c)$, etc., et il en résultera

$$\text{(F)} \quad \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c).(\gamma - c) + F_2(b_1, c).(\gamma - c)^2 + \ldots.$$

On voit clairement par ce qui précède quelle est celle des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

dont la formule (F) donne le développement : la série qui en est le second membre fournit la valeur pour $z = \gamma$ de celle des racines qui, se réduisant à b_1 pour $z = c$, varie d'une manière continue avec z, en supposant que le point Z aille de C en Γ sans sortir du cercle σ, c'est-à-dire en supposant que la distance CZ reste toujours moindre que la plus petite des distances CA, CA', CA'', etc. La formule ne peut

s'appliquer qu'aux valeurs de γ telles, que le module de $\gamma - c$ soit inférieur à cette plus petite distance; la notation $\varphi(\gamma)$ n'a même un sens déterminé qu'à cette condition, n° **14**.

16. Soit maintenant k une valeur quelconque de z et K le point correspondant : supposons que le point mobile Z arrive en K par un chemin CMK, *fig.* 7, qui ne passe par aucun des points A, A', A'', etc.; on pourra calculer comme il suit la valeur h_1 de la fonction u, pour $z = k$.

Du centre C on décrira un cercle qui laisse en dehors de lui les points A, A', A'', etc. Si ce cercle renferme tout le chemin CMK, on obtiendra h_1 en remplaçant γ par k dans la formule (F). Si le contraire arrive, la circonférence coupera la ligne CMK en un ou plusieurs points : soient C' celui de ces points où Z arrive en premier lieu et c' la valeur correspondante de z; on obtiendra la valeur b'_1 de u, au point C' en remplaçant dans la formule (F) γ par c'. Le chemin CMK se trouve partagé par ce point en deux parties, l'une CMC' et l'autre C'M'K : du centre C' on décrira un second cercle qui laisse en dehors tous les points A, A', A'', etc. Si ce cercle renferme tout le chemin C'M'K, on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par k : si le contraire arrive, la circonférence coupera le chemin C'M'K; soient C'' celui des points de rencontre où Z arrive en premier lieu et c'' la valeur correspondante de z. On obtiendra la valeur b''_1 de u_1 au point C'' en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par c''. Le chemin C'M'K est maintenant partagé par ce point en deux parties C'M'C'' et C''M''K : du centre C'' on décrira encore un troisième cercle qui laisse en dehors tous les points A, A', A'', etc. En répétant cette construction un nombre limité de fois, on arrivera à un cercle décrit du centre $C^{(n)}$ et qui renfermera complétement le chemin $C^{(n)}M^{(n)}K$; alors on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par $c^{(n)}$, b_1 par $b_1^{(n)}$ et γ par k.

Les points C et K restant fixes, si l'on déforme la ligne CMK sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc., la quantité h_1 reste la même. On pourra profiter de cette circonstance et aussi de l'indétermination des rayons des cercles pour faciliter le calcul de h_1; mais nous omettrons ces détails pour abréger.

17. Au lieu du développement donné par la formule (F), lequel est applicable tant que le point Z ne sort pas d'un certain cercle, on peut en former une infinité d'autres dont chacun sera exact dans toute l'étendue d'une courbe fermée différente du cercle.

Appelons $\psi(z)$ une fonction rationnelle de z qui s'annule pour $z=c$: si l'on fait, comme précédemment, $z=x+y\sqrt{-1}$, le module de $\psi(z)$, que nous représenterons par $m\psi(z)$, sera une fonction de x et de y, et l'équation

$$m\psi(z)=l,$$

où l désigne une constante positive, appartiendra à une courbe algébrique. Comme au point C, on a

$$m\psi(z)=0,$$

il est aisé de voir que, pour des valeurs suffisamment petites de l, une des branches de cette courbe devra se réduire à un contour fermé s dans l'intérieur duquel se trouve le point C [*].

Supposons maintenant que l croissant depuis zéro jusqu'à une certaine valeur λ, le contour s, qui, pour $l=0$, se réduisait au point C, aille toujours en s'élargissant et coïncide, pour $l=\lambda$, avec la courbe fermée σ. Admettons aussi que sur la courbe σ ou dans son intérieur on ne puisse avoir

$$\psi(z)=\psi(z')$$

sans qu'on ait en même temps

$$z=z',$$

que la dérivée de $\psi(z)$ ne s'annule pas dans ces mêmes limites, et, enfin, que tous les points A, A′, A″, etc., soient en dehors de cette courbe. Toutes ces conditions seront remplies si l'on prend λ assez petit.

Cela posé, si l'on assujettit Z à ne pas sortir du contour σ, la fonction u_1 ne pourra acquérir en chaque point qu'une seule valeur, quel que soit le chemin par lequel on y arrive. Nous appellerons $\varphi(z)$ cette valeur unique, et nous allons montrer qu'on peut la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $\psi(z)$.

[*] Dans les *Comptes rendus de l'Académie*, tome IV, page 777, M. Cauchy examine comment les diverses branches de cette courbe se transforment et se réunissent, lorsque le module l croît de zéro à l'infini.

Prenons dans l'intérieur du contour σ un point quelconque Γ, et nommons γ la valeur correspondante de z. L'expression

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie tant que le point Z ne sortira pas de ce contour; car, pour $z=\gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}$. Comme, d'ailleurs, cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la courbe σ, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}\,dz,$$

prise le long de cette ligne, sera égale à zéro. On aura donc

$$\varphi(\gamma)\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)},$$

d'où

$$\varphi(\gamma)=\frac{\displaystyle\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}}{\displaystyle\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}},$$

les intégrales étant toujours prises le long du contour σ.

L'intégrale

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

s'évalue aisément : on a, en effet,

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\cdot\frac{1}{z-\gamma}+\varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction rationnelle de z qui reste finie dans tout l'intérieur de σ ou même sur cette courbe; il en résulte

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\int\frac{dz}{z-\gamma}+\int\varpi(z)\,dz.$$

En vertu du n° **11**, on a

$$\int\varpi(z)\,dz=0;$$

quant à l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, on n'en change pas la valeur en la supposant prise le long d'une circonférence décrite du centre Γ avec un rayon très-petit ε, ce qui permet d'y faire

$$z-\gamma=\varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul : on a donc

$$\int \frac{dz}{z-\gamma}=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\psi'(\gamma)}.$$

Observons à présent que sur la courbe σ le module de $\psi(z)$ est égal à λ, et, par conséquent, supérieur à celui de $\psi(\gamma)$; l'expression

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi(z)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}}$$

peut donc être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}$, et l'on a

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi(z)}+\frac{\psi(\gamma)}{\psi^2(z)}+\frac{\psi^2(\gamma)}{\psi^3(z)}+\ldots.$$

On en conclut

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)}+\psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}+\psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)}+\ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(\gamma)=\frac{\psi'(\gamma)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)}+\psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}+\psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)}+\ldots\right],$$

où les intégrales peuvent être maintenant prises le long d'un contour fermé quelconque renfermé dans la courbe σ et enveloppant une fois le point C.

En réduisant ce contour à une circonférence d'un rayon très-petit ayant le point C pour centre, on prouve facilement que l'intégrale

$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^n(z)}$ est égale à $2\pi r_n\sqrt{-1}$, r_n désignant ce que M. Cauchy appelle le résidu de la fonction $\frac{\varphi(z)}{\psi^n(z)}$ relatif à $z=c$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\varphi(\gamma) = \psi'(\gamma)\left[r_1 + r_2\psi(\gamma) + r_3\psi^2(\gamma) + \ldots\right].$$

Cette formule, qui s'étend à tous les points du contour σ et de son intérieur, donne l'expression de $\varphi(\gamma)$ en une série ordonnée suivant les puissances de $\psi(\gamma)$.

En y faisant

$$\psi(z) = z - c,$$

on retrouve la formule (F); pour en donner une autre application, prenons

$$\psi(z) = (z-c)(z-c'),$$

c' désignant la valeur de z qui répond au point C' : l'équation

$$m(z-c)(z-c') = l$$

représente le lieu des points tels, que le produit de leurs distances aux points C et C' soit égal à l. Pour des valeurs de l moindres que $\frac{1}{4}\Delta^2$, Δ étant la distance CC', le lieu se compose de deux courbes fermées : une de ces courbes enveloppe le point C, elle va en s'élargissant à mesure que l augmente; et pour $l=\frac{1}{4}\Delta^2$, elle devient la moitié POQ, *fig.* 8, d'une lemniscate ayant pour foyers les points C et C'. Si tous les points A, A', A'', etc., sont sur cette demi-lemniscate ou en dehors, on pourra prendre pour le contour σ la courbe fermée infiniment voisine qui répond à $l=\frac{1}{4}\Delta^2-\varepsilon$, ε désignant un infiniment petit positif; car il est aisé de voir que toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. En effet, la dérivée $2z-c-c'$ de $\psi(z)$ ne s'annule que pour la valeur $z=\frac{c+c'}{2}$, qui répond au point O extérieur au contour σ : de plus, l'équation

$$\psi(z) = \psi(z')$$

donne ici pour z' les deux valeurs $z' = z$, $z' = c + c' - z$, et si le point qui répond à la première valeur est situé en dedans du contour σ, celui qui répond à la seconde sera en dehors, puisque ces deux points sont placés symétriquement par rapport au point O.

On aura donc l'équation

$$\varphi(\gamma) = (2\gamma - c - c')\left[\begin{array}{l} r_1 + r_2(\gamma - c)(\gamma - c') \\ + r_3(\gamma - c)^2(\gamma - c')^2 + \ldots \end{array}\right],$$

r_n désignant le résidu relatif à $z = c$ de $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^n(z-c')^n}$, et cette formule sera applicable tant que le point Γ correspondant à $z = \gamma$ sera dans l'intérieur de la demi-lemniscate POQ.

Ajoutons qu'en suivant la marche tracée au n° **16**, on pourra se servir de ces nouveaux développements pour le calcul de la fonction u_1 à l'extrémité d'un chemin donné.

DEUXIÈME PARTIE.

18. Nous avons établi que la valeur de la fonction u_1 au point K reste la même, quand le chemin CMK suivi par le point Z vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel cette fonction devienne infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0;$$

nous avons ensuite donné le moyen de calculer cette valeur de u_1, lorsque le chemin CMK est connu. Mais si ce chemin, en se déformant, franchit un ou plusieurs des points dont nous venons de parler, la valeur de u_1 pour le point K changera généralement : il nous faut examiner comment ces diverses valeurs de u_1 se changent les unes dans les autres.

Pour plus de clarté, nous supposerons d'abord que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme $f(u, z)$ soit indépendant de z; alors les valeurs de u tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne peuvent devenir infinies pour des valeurs finies de z.

Soit maintenant A un point pour lequel p racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales : nommons b la valeur commune de ces racines et a la valeur de z au point A. Décrivons autour de ce point un contour fermé de dimensions infiniment petites CLMC, *fig.* 9 [*]; prenons-y un point C pour position initiale du point mobile Z; appelons u_1, $u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et qui se réduisent pour la position initiale C de z aux p racines très-peu différentes de b de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

On sait qu'après une révolution de Z sur le contour CLMC les fonctions de z, qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et dont les valeurs au point de départ diffèrent infiniment peu des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

reprennent leurs valeurs initiales : voyons ce qui arrive aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Observons que, pour $u = b$, les polynômes

$$f(u, a), \quad \frac{df(u, a)}{du}, \quad \frac{d^2 f(u, a)}{du^2}, \ldots, \quad \frac{d^{p-1} f(u, a)}{du^{p-1}},$$

doivent s'annuler, mais que la dérivée suivante $\frac{d^p f(u, a)}{du^p}$ doit prendre une valeur A différente de zéro. Si donc dans l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

[*] Nous supposerons dans ce qui va suivre que la ligne infiniment petite CLMC ne fait qu'une seule circonvolution autour du point A, c'est-à-dire que l'angle polaire formé par le rayon vecteur AZ avec une direction fixe varie seulement de 2π, pendant une révolution de Z sur le contour CLMC.

on pose

$$u = b + \beta, \quad z = a + \alpha,$$

elle prendra la forme

$$(1) \qquad A\beta^p + \sum B\beta^q \alpha^r = 0,$$

le signe $\sum$ désignant une somme de termes dans lesquels les exposants q et r sont entiers et positifs; dans les termes où r est nul, q est plus grand que p, et il y a nécessairement un terme au moins où, q étant nul, r ne l'est pas; autrement l'équation (1) serait divisible par β, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

serait divisible par $u - b$, et, par conséquent, ne serait pas irréductible.

Le point Z étant supposé infiniment voisin de A, le module de la différence $z - a = \alpha$ sera infiniment petit, et, parmi les valeurs correspondantes de u, tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

il y en aura p telles, que le module de la différence $u - b = \beta$ soit infiniment petit. Si l'on veut les déterminer, il faudra chercher les p valeurs infiniment petites de β qui satisfont à l'équation (1), et, pour les obtenir approximativement, il suffira de conserver, dans cette équation, les termes de l'ordre le moins élevé.

Commençons par le cas le plus ordinaire, celui où la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annule pas pour $z = a$, $u = b$; alors il y a, dans l'équation (1), un terme de la forme $B\alpha$, et il est clair que les deux termes $A\beta^p$ et $B\alpha$ sont d'un ordre moins élevé que tous les autres. Les p valeurs cherchées de β sont donc données approximativement par l'équation

$$A\beta^p + B\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta^p = h\alpha,$$

en faisant $-\frac{B}{A} = h$. Or, si l'on pose $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, ρ désignant la distance AZ et τ l'angle qu'elle fait avec la direction des x positives; si,

de plus, on représente par $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ une des valeurs de $\sqrt[p]{h\rho}$, les p valeurs de β, qui satisfont à l'équation

$$\beta^p = h\alpha,$$

seront

$$\beta_1 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau}{p}\sqrt{-1}}, \qquad \beta_2 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

$$\beta_3 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+4\pi}{p}\sqrt{-1}}, \ldots, \quad \beta_p = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2(p-1)\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

Lorsque le point Z, après avoir fait une révolution sur le contour CLMC, est revenu à sa position initiale C, le rayon vecteur ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro; le facteur $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ a donc repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π, et, par conséquent, β_1 a acquis la valeur initiale de β_2, β_2 a acquis celle de β_3, et ainsi de suite, jusqu'à β_p qui a pris celle de β_1.

Ces conclusions sont rigoureuses, bien que les valeurs précédentes de β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_p$ ne soient qu'approchées. En effet, nommons maintenant β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_p$ les valeurs exactes de ces fonctions; l'erreur commise sur chacune d'elles dans les formules précédentes est un infiniment petit d'un ordre supérieur à $\frac{1}{p}$, en regardant ρ comme du premier ordre. Mais le système des valeurs de β fournies par l'équation (1) doit se retrouver le même quand le point Z est revenu à son point de départ. Si donc la valeur finale de β_1, après une révolution de Z, n'était pas exactement égale à la valeur initiale de β_2, il faudrait qu'elle fût égale à la valeur initiale de quelque racine de l'équation (1) autre que β_2; or cela est impossible, puisqu'elle différerait de cette valeur initiale ou d'une quantité finie, ou d'un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{p}$, qui ne peut être nul tant que ρ ne l'est pas. On voit de même que la valeur finale de β_2 est rigoureusement égale à la valeur initiale de β_3, et ainsi de suite. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ ne se réduit pas à zéro pour $z = a$, $u = b$, les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_p$, qui deviennent égales à b au point A, *peuvent*

être rangées sur un cercle de façon qu'après une révolution de Z *sur un contour infiniment petit tracé autour du point* A, *la valeur finale de chacune d'elles soit égale à la valeur initiale de la suivante.*

C'est ce que nous énoncerons d'une manière abrégée en disant que ces fonctions forment autour du point A un *système circulaire* composé de p termes.

On a admis dans la démonstration que le point Z parcourait le contour CLMC dans le sens où l'angle polaire τ augmente et que nous appellerons le *sens direct :* s'il le parcourait en sens contraire, les valeurs finales de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ seraient respectivement les valeurs initiales de $u_p, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$.

Si le point Z faisait dans le sens direct deux révolutions au lieu d'une, les valeurs finales des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ seraient respectivement égales aux valeurs initiales de $u_3, u_4, \ldots, u_2$: après trois révolutions, elles seraient égales aux valeurs initiales de $u_4, u_5, \ldots, u_3$, et ainsi de suite. Ce n'est qu'après p révolutions du point Z que ces fonctions auront repris leurs valeurs initiales.

19. Lorsque la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ s'annule pour $z = a$, $u = b$, les propositions précédentes ne sont plus toujours exactes : pour savoir ce que les racines deviennent dans ce cas après une révolution du point Z, revenons à l'équation (1) et cherchons à y mettre en évidence les termes de l'ordre le moins élevé. Soit T un terme quelconque ; il y aura deux cas à distinguer : ou bien il n'existera dans l'équation (1) aucun autre terme dans lequel les exposants de α et de β soient à la fois moindres que dans T (l'un des deux pouvant être égal), ou bien il existera de pareils termes. Appelons A la somme des termes T qui sont dans le premier cas et A′ la somme des autres, de sorte qu'on ait

$$f(b + \beta,\ a + \alpha) = \mathrm{A}\beta^p + \sum \mathrm{B}\beta^q \alpha^r = \mathrm{A} + \mathrm{A}';$$

les termes de l'ordre le moins élevé se trouveront certainement dans le groupe A. D'ailleurs, si l'on range les termes de A dans un ordre tel, que les exposants de β aillent en diminuant, les exposants de α devront aller en augmentant, sans quoi les exposants de α et de β dans un de ces termes seraient respectivement moindres que dans un

autre, et alors ce dernier ferait partie du groupe A'. Si donc on désigne par p, p_1, p_2,..., p_{i-1} des nombres entiers décroissants, et par q_1, q_2,..., q_i des nombres entiers croissants, A sera de la forme

$$A = A\beta^p + A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \ldots + A_i\alpha^{q_i}.$$

Voici maintenant la question qui se présente : Dans le polynôme A, choisir de toutes les manières possibles un groupe de deux ou de plusieurs termes tels, qu'en y regardant α comme un infiniment petit du premier ordre et β comme un infiniment petit d'un ordre convenable, ces termes soient d'un même ordre inférieur à celui de tous les autres termes du polynôme.

Quand on aura trouvé tous ces groupes, on formera, en les égalant à zéro, des équations dont chacune déterminera approximativement une ou plusieurs des p valeurs infiniment petites de β.

Supposons donc qu'en regardant β comme de l'ordre μ, les deux termes

$$A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f}, \quad A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g},$$

soient d'un même ordre, et que tous les autres termes de A soient d'un ordre au moins égal; on aura

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

et, pour toutes les valeurs de h autres que f et g,

$$\mu p_h + q_h > \mu p_f + q_f,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. (Pour que ces notations s'appliquent aux termes extrêmes de A, on supposera $p_0 = p$, $q_0 = 0$, $p_i = 0$.)

On rend l'interprétation de ces conditions plus facile en leur donnant une signification géométrique. Regardons les nombres entiers p_h et q_h comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point que nous appellerons M_h; alors le point M_0, *fig.* 10, sera sur l'axe des x, le point M_i sur l'axe des y, et tous les autres points M_h dans l'angle des coordonnées positives. De plus, la droite qui joint deux quelconques de ces points M_h, M_l rencontrera les axes des x et des y du côté des coordonnées positives; cela résulte de ce que si l'abscisse p_h est plus

grande que l'abscisse p_l, l'ordonnée q_k sera moindre, au contraire, que l'ordonnée q_l.

D'un autre côté, si l'on construit la droite OL dont le coefficient angulaire est $\frac{1}{\mu}$, la quantité $\frac{\mu p_l + q_l}{\sqrt{1+\mu^2}}$ exprimera la projection de OM_k sur OL, et puisqu'on doit avoir

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

on voit que les projections de OM_f et de OM_g sur OL doivent être égales, ou, en d'autres termes, que OL doit être perpendiculaire sur la droite $M_f M_g$. De plus, on doit avoir

$$\mu p_k + q_k > \mu p_f + q_f;$$

par conséquent, la projection de OM_k sur OL doit être supérieure ou au moins égale à celle de OM_f. En d'autres termes, le point M_k doit être par rapport à l'origine au delà de la droite $M_f N_g$, ou du moins sur cette droite.

Ainsi, pour obtenir dans le polynôme A les groupes de termes définis ci-dessus, ou, ce qui revient au même, pour connaître ceux des points M_0, M_1, M_2, etc., auxquels correspondent les termes de ces groupes, on cherchera de toutes les manières possibles deux points M_f, M_g tels, qu'il n'y en ait aucun autre situé, par rapport à la droite $M_f M_g$ qui les joint, du même côté que l'origine. Sur cette droite pourront se trouver encore d'autres points M_k, M_l, etc. : alors un des groupes demandés sera

$$G = A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f} + A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g} + A^{(k)}\beta^{p_k}\alpha^{q_k} + A^{(l)}\beta^{p_l}\alpha^{q_l} + \ldots;$$

si l'on détermine le nombre μ par l'équation

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

qui donne

$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g},$$

et qu'on regarde β comme étant de l'ordre μ, tous les termes de ce groupe seront d'un même ordre $\mu p_f + q_f$ inférieur à l'ordre de tous les autres termes de A, et, par conséquent, de tous les autres termes de l'équation (1).

Pour former les groupes G sans en laisser échapper aucun, on pourra procéder comme il suit. Par le point M_0, *fig.* 11, on imaginera une droite coïncidant d'abord avec l'axe des x, et on la fera tourner autour de M_0 dans un sens tel, qu'elle rencontre la partie positive de l'axe des y. On arrêtera ce mouvement de rotation dès que la droite mobile passera par quelqu'un des points M_1, M_2, etc. : à ce moment elle en pourra contenir plusieurs, et, si nous les nommons M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$, les indices $\varepsilon, \zeta, \ldots, \eta$ étant rangés par ordre de grandeur, les termes de A correspondants aux points M_0, M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$ formeront un premier groupe. Faisons maintenant tourner la droite mobile, toujours dans le même sens, mais autour du point M_η, jusqu'à ce qu'elle atteigne quelqu'un des points $M_{\eta+1}, M_{\eta+2}$, etc., et soient M_η, $M_\theta, \ldots, M_\iota$ les points qu'elle renferme dans cette nouvelle position : les termes de A correspondants aux points M_η, $M_\theta, \ldots, M_\iota$ composeront un deuxième groupe. Faisons encore tourner la droite mobile autour de M_ι, jusqu'à ce qu'elle atteigne de nouveaux points $M_\kappa, \ldots, M_\lambda$; nous obtiendrons un troisième groupe formé des termes correspondants aux points M_ι, $M_\kappa, \ldots, M_\lambda$, et ainsi de suite. On continuera jusqu'à ce que la droite mobile passe par le dernier point M_i : les divers groupes ainsi formés seront :

$$
\begin{aligned}
G_1 &= A\beta^{p} + A^{(\varepsilon)}\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + \ldots + A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta},\\
G_2 &= A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + A^{(\theta)}\beta^{p_\theta}\alpha^{q_\theta} + \ldots + A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota},\\
G_3 &= A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + A^{(\kappa)}\beta^{p_\kappa}\alpha^{q_\kappa} + \ldots + A^{(\lambda)}\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_\omega &= A^{(\varpi)}\beta^{p_\varpi}\alpha^{q_\varpi} + \ldots + A^{(i)}\alpha^{q_i},
\end{aligned}
$$

où l'on peut remarquer que le premier terme du premier groupe G_1 est indépendant de α; que le dernier terme du dernier groupe G_ω est indépendant de β; et, enfin, que le dernier terme de chaque groupe est en même temps le premier terme du groupe suivant [*].

[*] La règle qu'on vient de donner pour le mouvement de la droite mobile subsisterait encore, si, outre les points M correspondants aux termes de A, on avait encore

Si maintenant on égale successivement ces divers groupes à zéro, on aura les équations qui fournissent, approximativement, les valeurs infiniment petites de β. L'équation

$$G_1 = o,$$

divisée par β^{p_η}, nous donnera $p - p_\eta$, valeurs de β, qui seront de l'ordre $\frac{q_\eta}{p - p_\eta}$; de même l'équation

$$G_2 = o,$$

divisée par $\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\eta}$, fournira $p_\eta - p_\iota$, valeurs qui seront de l'ordre $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; puis l'équation

$$G_3 = o,$$

divisée par $\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\iota}$, en donnera $p_\iota - p_\lambda$, de l'ordre $\frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda}$, et ainsi de suite. Enfin, de l'équation

$$G_\omega = o,$$

divisée par α^{q_ϖ}, on tirera p_ϖ, valeurs de β, de l'ordre $\frac{q_\iota - q_\varpi}{p_\varpi}$. Le nombre total de ces valeurs infiniment petites de β est

$$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\varpi,$$

ou simplement p, comme cela devait être.

Il suit de la construction expliquée ci-dessus, que le polygone $M_0 M_\eta M_\iota \ldots M_\varpi M_\iota$ est convexe et tourne sa convexité vers l'origine; les valeurs numériques des coefficients angulaires des droites $M_0 M_\eta$, $M_\eta M_\iota$, $M_\iota M_\lambda$, ..., $M_\varpi M_\iota$ vont donc en augmentant, de sorte qu'on a

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots < \frac{q_\iota - q_\varpi}{p_\varpi},$$

le signe $<$ excluant l'égalité. Ainsi, les valeurs infiniment petites de β

---

construit ceux qui répondent aux différents termes de A'; car aucun de ceux-ci ne peut être, par rapport à la droite mobile, du même côté que l'origine. La séparation du premier membre de l'équation (1) dans les deux polynômes A et A' n'est donc pas indispensable pour la recherche des groupes G_1, G_2, etc.; mais elle l'abrége.

fournies par l'équation

$$G_1 = 0,$$

sont d'un ordre moindre que celles qu'on tire de l'équation

$$G_2 = 0;$$

celles-ci, à leur tour, sont d'un ordre moindre que celles qui sont données par l'équation

$$G_3 = 0,$$

et ainsi de suite.

Considérons en particulier une de ces équations, par exemple l'équation

$$G_2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$A^{(n)}\beta^{p_n - p_1} + A^{(\theta)}\beta^{p_\theta - p_1}\alpha^{q_\theta - q_n} + \ldots + A^{(1)}\alpha^{q_1 - q_n} = 0.$$

L'ordre μ des valeurs de β qu'on en tire étant, comme on l'a vu, égal à $\frac{q_1 - q_n}{p_n - p_1}$, si l'on appelle r et s les quotients de $q_1 - q_n$ et de $p_n - p_1$ par leur plus grand commun diviseur φ, on aura

$$\mu = \frac{r}{s};$$

d'ailleurs, tous les termes de l'équation précédente étant du même ordre, on a

$$\mu(p_n - p_1) = \mu(p_\theta - p_1) + q_\theta - q_n = \ldots = q_1 - q_n;$$

il en résulte, en multipliant par s,

$$r(p_n - p_1) = r(p_\theta - p_1) + s(q_\theta - q_n) = \ldots = s(q_1 - q_n) = rs\varphi.$$

On voit, par là, que la somme $r(p_\theta - p_1) + s(q_\theta - q_n)$ étant divisible par s, ainsi que la partie $s(q_\theta - q_n)$, l'autre partie $r(p_\theta - p_1)$ doit l'être aussi, et comme s est premier avec r, $\frac{p_\theta - p_1}{s}$ doit être un nombre entier ψ. Dans l'équation

$$r(p_\theta - p_1) + s(q_\theta - q_n) = rs\varphi,$$

remplaçons $p_\theta - p_1$ par $s\psi$, et il viendra

$$q_\theta - q_n = r(\varphi - \psi);$$

l'équation

$$G_2 = 0$$

peut donc se mettre sous la forme

$$A^{(n)}\beta^{s\varphi} + A^{(\theta)}\beta^{s\psi}\alpha^{r(\varphi-\psi)} + \ldots + A^{(1)}\alpha^{r\varphi} = 0,$$

ou bien, en posant $\beta^s = \alpha^r x$,

$$(2) \qquad A^{(n)}x^{\varphi} + A^{(\theta)}x^{\psi} + \ldots + A^{(1)} = 0.$$

Cette équation détermine pour x un nombre φ de valeurs toutes différentes de zéro, que nous désignerons par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$, et que nous supposerons d'abord toutes inégales. Si nous prenons $x = h_1$, et que nous fassions, comme ci-dessus, $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, la relation $\beta^s = \alpha^r x$ nous donnera pour β les s valeurs suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \beta_1 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r\tau}{s}\sqrt{-1}}, & \beta_2 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \\ \beta_3 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+4\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \ldots, & \beta_s = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+2(s-1)\pi]}{s}\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

où $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ désigne une quelconque des valeurs de $\sqrt[s]{h_1\rho^r}$. En remplaçant successivement dans ces valeurs h_1 par $h_2, h_3, \ldots, h_\varphi$, nous aurons toutes les valeurs approchées de β au nombre de $s\varphi = p - p_n$, qui correspondent à l'équation

$$G_2 = 0.$$

Lorsque le point Z, après une révolution dans le sens direct autour du point A, revient à sa position initiale C, ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro, et, par conséquent, le facteur $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ a repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π : chacune des s valeurs de β qui composent la suite (3) est donc devenue égale à la valeur initiale de celle qui la suit. Cette conclusion est rigoureuse, bien que les expressions (3) ne soient qu'approchées; en d'autres termes, si l'on appelle β_k et β_{k+1} les valeurs exactes des deux fonctions

de α qui ont pour valeurs approchées

$$(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+(2k-2)\pi]}{s}\sqrt{-1}}, \quad (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2k\pi)}{s}\sqrt{-1}},$$

je dis qu'après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, la valeur finale de β_k sera exactement égale à la valeur initiale de β_{k+1}.

En effet, le système de toutes les valeurs de β doit se retrouver le même après une révolution de Z, et, par conséquent, la valeur finale de β_k doit être égale à la valeur initiale de quelque autre racine β' de l'équation (1). On voit d'abord que β' doit, comme β_k, se réduire à zéro avec α, et qu'ainsi elle doit être donnée approximativement par une des équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0;$$

de plus elle doit être, comme β_k, un infiniment petit de l'ordre $\frac{r}{s} = \frac{q_1 - q_2}{p_2 - p_1}$; il faut donc qu'elle réponde à l'équation

$$G_2 = 0,$$

puisque les racines qui répondent aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_3 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0,$$

sont, ainsi qu'on l'a vu, d'ordres différents. Maintenant, dans les formules (3), les erreurs commises sont des infiniment petits d'un ordre supérieur à $\frac{r}{s}$; la fonction β' ne peut donc être que β_{k+1}, sans quoi sa valeur initiale, qui doit être égale à la valeur finale de β_k, en différerait par une quantité de l'ordre $\frac{r}{s}$.

On voit par ce qui précède que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_2 = 0,$$

se partagent en φ groupes correspondants aux racines $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ de l'équation (2), et que les s fonctions qui composent un même groupe

peuvent être rangées circulairement dans un ordre tel, que chacune d'elles devienne égale, après une révolution de Z, à la valeur initiale de la suivante. En d'autres termes, chacun de ces groupes est un système circulaire, n° **18**.

On peut appliquer la même méthode à toutes les équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0.$$

Nommons φ_1 le plus grand commun diviseur de $p - p_\eta$ et de q_η, φ_2 celui de $p_\eta - p_\iota$ et de $q_\iota - q_\eta$, φ_3 celui de $p_\iota - p_\lambda$ et de $q_\lambda - q_\iota$, et ainsi de suite; enfin, φ_ω celui de p_ϖ et de $q_\iota - q_\varpi$: appelons $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\omega$ les nombres entiers $\frac{p - p_\eta}{\varphi_1}, \frac{p_\eta - p_\iota}{\varphi_2}, \frac{p_\iota - p_\lambda}{\varphi_3}, \ldots, \frac{p_\varpi}{\varphi_\omega}$. Nous trouverons que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_1 = 0$$

se partagent en φ_1 systèmes circulaires composés chacun de s_1 termes: de même, les valeurs données par l'équation

$$G_2 = 0$$

se partagent en φ_2 systèmes circulaires de s_2 termes, et ainsi de suite jusqu'aux valeurs données par l'équation

$$G_\omega = 0,$$

lesquelles se partagent en φ_ω systèmes circulaires de s_ω termes.

Rappelons-nous maintenant qu'en vertu des relations

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta,$$

les valeurs de β qui s'annulent avec α correspondent aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de z qui se réduisent à b pour $z = a$, et nous en concluons que les fonctions de z désignées ci-dessus par u_1, u_2, u_p peuvent toujours être partagées en un certain nombre de systèmes circulaires relativement au point A. Observons que le nombre de ces systèmes peut se réduire à l'unité: s'il y en a plusieurs, le nombre des termes qui les composent peut varier d'un système à l'autre; enfin il peut y avoir des systèmes qui ne soient composés que d'un seul terme.

Ajoutons qu'il est permis de comprendre dans l'énoncé précédent

non-seulement les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_p$ dont les valeurs initiales diffèrent infiniment peu de b, mais encore les autres fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs initiales sont très-peu différentes des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0.$$

Car chacune de ces dernières, reprenant sa valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour CLMC, peut être regardée comme formant un système circulaire composé d'un seul terme. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

Les diverses fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ *qui satisfont à l'équation*

$$f(u, z) = 0$$

peuvent toujours se partager, relativement au point A, *en un certain nombre de systèmes circulaires.*

20. On a admis dans la démonstration précédente que l'équation (2) et les autres équations pareilles qui correspondent aux polynômes G_1, $G_2, \ldots, G_\omega$ avaient toutes leurs racines inégales. Supposons à présent que l'équation (2) ait t racines égales à h_1; alors chacune des formules de la suite (3) donne à la fois l'expression approchée de t valeurs de β, et pour les distinguer, il faut recourir à des expressions plus approchées des st valeurs de β correspondantes à la racine h_1.

Pour cela, on posera

$$\alpha = \alpha'^s, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta';$$

on substituera ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtiendra entre α' et β' une équation (1'), qui devra fournir st valeurs de β' infiniment petites, d'un ordre supérieur au nombre r, α' étant regardé maintenant comme du premier ordre. On appliquera à l'équation (1') la même méthode dont on s'est servi pour distinguer, dans l'équation (1), les termes de l'ordre le moins élevé; on trouvera ainsi, pour déterminer approximativement β', des équations analogues aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \text{ etc.},$$

et l'on ne conservera que celles qui donnent pour β' des valeurs d'un ordre supérieur à r.

Soit $G' = 0$ une de ces équations; on pourra trouver deux nombres entiers r' et s' tels, qu'en faisant $\beta'^{s'} = \alpha'^{r'} x'$, l'équation $G' = 0$ prenne la forme

$$(2') \qquad A' x'^{\varphi'} + B' x'^{\psi'} + \ldots = 0,$$

analogue à l'équation (2). Admettons que l'équation (2′) n'ait pas de racines égales, et soit h' une de ses racines. Parmi les st valeurs de β dont nous nous occupons, il y en aura ss' qui seront données, approximativement, par les formules

$$\alpha'^{s} = \alpha, \quad \beta'^{s'} = \alpha'^{r'} h', \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^{r} + \beta',$$

ou, ce qui est la même chose, par l'équation

$$\beta = h_1^{\frac{1}{s}} \rho^{\frac{r}{s}} e^{\frac{r(\tau + 2k\pi)}{s}\sqrt{-1}} + h' \rho^{\frac{r'}{ss'}} e^{\frac{r'\left(\frac{\tau + 2k\pi}{s} + 2k'\pi\right)}{s'}\sqrt{-1}},$$

k désignant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s-1$, et k' un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s'-1$.

Représentons le second membre par $\beta_{k,k'}$; les ss' valeurs dont il est susceptible pourront être rangées circulairement dans l'ordre suivant :

$$(3') \quad \begin{cases} \beta_{0,0}, \ \beta_{1,0}, \ \beta_{2,0}, \ldots, \ \beta_{s-1,0}, \ \beta_{0,1}, \ \beta_{1,1}, \ \beta_{2,1}, \ldots, \ \beta_{s-1,1}, \ \beta_{0,2}, \ldots, \\ \beta_{0,s'-1}, \ \beta_{1,s'-1}, \ \beta_{2,s'-1}, \ldots, \ \beta_{s-1,s'-1}. \end{cases}$$

Si maintenant nous supposons que le point Z fasse une révolution dans le sens direct sur le contour CLMC, *fig.* 9, l'angle τ croîtra de 2π, et chacune des valeurs de β comprises dans la suite qu'on vient d'écrire deviendra égale à la valeur initiale de la suivante : elles forment donc un système circulaire. Aux diverses racines h' de l'équation (2′) répondront de semblables systèmes de valeurs de β, et, par conséquent, la proposition énoncée à la fin du n° **19** ne cesse pas d'être vraie dans le cas qui nous occupe.

Si l'équation (2′) avait elle-même des racines multiples, par exemple t' racines égales à h', il répondrait à cette racine $ss't'$ valeurs de β, et chacune des expressions de la suite (3′) serait la valeur approchée de

t' d'entre elles. Alors on ferait

$$\alpha = \alpha'^{s} = \alpha''^{ss'}, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + h'^{\frac{1}{s'}} \alpha''^{r'} + \beta'';$$

on substituerait ces valeurs dans l'équation (1) et l'on obtiendrait, entre α'' et β'', une équation (1″) qui devrait fournir, pour β'', $ss't'$ valeurs infiniment petites d'un ordre supérieur à r', α'' étant regardé comme du premier ordre. On continuera l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on ait des expressions approchées distinctes pour toutes les valeurs iufiniment petites de β, et cela arrivera nécessairement, sans quoi il y aurait des valeurs de β égales entre elles, quel que fût α, c'est-à-dire des valeurs de u égales entre elles, quel que fût z, et l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne serait pas irréductible. On voit en même temps, par la forme de ces expressions approchées, que les valeurs de β se partageront toujours en systèmes circulaires; nous pouvons donc conclure enfin que la proposition du n° **19** est vraie dans tous les cas.

21. Nous venons de prouver que les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_p$, se partagent toujours en un certain nombre de systèmes circulaires; nous avons donné, de plus, une méthode pour effectuer ce partage. Il ne sera pas inutile de faire voir que la même méthode fournit les expressions de ces fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$.

Lorsque le nombre p se réduit à l'unité, on retombe sur le cas déjà traité au n° **14**, où la fonction u_1 se développe suivant les puissances entières de $z - a$. Passons au cas du n° **18**, où le nombre p étant quelconque, la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ est supposée ne pas s'annuler pour $u = b$, $z = a$.

Conservons les notations de ce numéro; seulement, mettons l'équation (1) sous la forme

$$A\beta^p + B\alpha + \sum C\beta^q \alpha^r = 0,$$

où r ne peut être nul, à moins que q ne soit plus grand que p, et

où q ne peut être nul, à moins que r ne soit plus grand que 1. Faisons $\alpha = \alpha'^p$, α' désignant une nouvelle variable; les p valeurs infiniment petites de β seront du même ordre que α': si donc on pose $\beta = \alpha' v$, les p valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par α'^p,

$$(4) \qquad \mathrm{A} v^p + \mathrm{B} + \sum \mathrm{C} v^q \alpha'^{(r-1)p+q} = 0,$$

où l'exposant $(r-1)p+q$ est au moins l'unité: on voit bien que pour $\alpha' = 0$, elle donne p valeurs de v finies et inégales que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ et qui sont les diverses valeurs de $\sqrt[p]{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}$. Si maintenant nous appelons v_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (4), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$, nous conclurons du n° **14** qu'elle peut se développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' reste inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' différentes de zéro qui font acquérir à l'équation (4) des racines égales ou infinies. Nous pouvons donc poser, dans ces limites,

$$v_n = \gamma_n + a_n \alpha' + b_n \alpha'^2 + c_n \alpha'^3 + \ldots,$$

où les coefficients a_n, b_n, c_n, etc., sont des fonctions rationnelles de γ_n et des coefficients de l'équation (4) et s'obtiennent sans difficulté par le théorème de Taylor. Nous aurons, par conséquent, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n \alpha' + a_n \alpha'^2 + b_n \alpha'^3 + c_n \alpha'^4 + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{1}{p}} + a_n \alpha^{\frac{2}{p}} + b_n \alpha^{\frac{3}{p}} + c_n \alpha^{\frac{4}{p}} + \ldots.$$

Comme le module de α augmente ou diminue en même temps que celui de α', cette formule sera applicable tant que le module de α sera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α autres que zéro, qui font acquérir des racines égales à l'équation (1). En d'autres termes, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA'', etc.,

pour rayon, on aura l'équation

$$u_n = \gamma_n (z-a)^{\frac{1}{p}} + a_n (z-a)^{\frac{2}{p}} + b_n (z-a)^{\frac{3}{p}} + c_n (z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots$$

En y remplaçant successivement l'indice n par chacun des nombres $1, 2, \ldots, p$, on obtiendra les expressions des p fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z-a$.

22. Supposons maintenant, comme au n° **19**, que la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annule pour $u=a$, $z=b$, de sorte que le terme $B\alpha$ manque dans l'équation (1). Considérons, en particulier, les $s\varphi$ valeurs infiniment petites de β qui sont données approximativement par l'équation

$$G_2 = 0,$$

et observons que l'équation (1), à laquelle elles satisfont exactement, peut se mettre sous la forme

$$G_2 + \sum C\beta^k \alpha^l = 0,$$

les termes de la somme $\sum$ étant d'un ordre plus élevé que ceux de G_2, quand on regarde α comme du premier ordre et β comme de l'ordre $\mu = \frac{r}{s}$: cela revient à dire qu'on aura

$$\frac{r}{s}k + l > \frac{r}{s}p_\eta + q_\eta,$$

ou bien

$$r(k-p_\eta) + s(l-q_\eta) > 0,$$

le signe $>$ excluant l'égalité.

Faisons maintenant $\alpha = \alpha'^{s}$; les valeurs de β dont nous occupons seront du même ordre que α'^{r}, et si nous posons $\beta = \alpha'^{r} v$, les $s\varphi$ valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par $\alpha'^{rp_\eta + sq_\eta}$,

$$\overset{(\eta)}{A} v^{p_\eta} + \overset{(\theta)}{A} v^{p_\theta} + \ldots + \overset{(\iota)}{A} v^{p_\iota} + \sum C v^k \alpha'^{r(k-p_\eta)+s(l-q_\eta)} = 0,$$

ou bien, en désignant par σ un nombre entier au moins égal à 1,

$$(5)\qquad v^{p_1}\left(\mathrm{A}^{(\eta)} v^{s\varphi} + \mathrm{A}^{(\theta)} v^{s\psi} + \ldots + \mathrm{A}^{(\iota)}\right) + \sum \mathrm{C} v^k \alpha'^{\sigma} = 0.$$

On voit, en effet, que, pour $\alpha' = 0$, cette équation se réduisant à

$$(6)\qquad \mathrm{A}^{(\eta)} v^{s\varphi} + \mathrm{A}^{(\theta)} v^{s\psi} + \ldots + \mathrm{A}^{(\iota)} = 0,$$

donne pour v un nombre $s\varphi$ de valeurs finies et différentes de zéro : en désignant comme ci-dessus par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ les racines de l'équation (2), celles de l'équation (6), que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s\varphi}$, ne seront autre chose que les diverses valeurs des radicaux $\sqrt[s]{h_1}$, $\sqrt[s]{h_2}, \ldots, \sqrt[s]{h_\varphi}$; elles seront donc toutes inégales, si l'équation (2) a elle-même toutes ses racines inégales, ce que nous supposerons d'abord.

Nommons v_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (5), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$; on pourra, d'après le n° **14**, la développer suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' restera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' autres que zéro qui font acquérir à l'équation (5) des racines égales ou infinies. Soit donc, dans ces limites,

$$v_n = \gamma_n + a_n\alpha' + b_n\alpha'^2 + \ldots;$$

il s'ensuivra, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n\alpha'^r + a_n\alpha'^{r+1} + b_n\alpha'^{r+2} + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n\alpha^{\frac{r}{s}} + a_n\alpha^{\frac{r+1}{s}} + b_n\alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots.$$

Par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ qui sont déterminées approximativement par l'équation

$$\mathrm{G}_2 = 0$$

seront exprimées par la série

$$\gamma_n(z-a)^{\frac{r}{s}} + a_n(z-a)^{\frac{r+1}{s}} + b_n(z-a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots,$$

où l'indice n doit être remplacé successivement par les nombres 1, $2, \ldots, n$, et les formules ainsi obtenues seront applicables, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon.

23. Admettons ensuite, comme au n° **20**, que l'équation (2) ait s racines égales à h_1, mais que l'équation (2′) ait toutes ses racines inégales. En conservant les notations de ce numéro, et posant

$$\alpha' = \alpha''^{s'}, \quad \beta' = \alpha''^{r'} v,$$

on verra, comme tout à l'heure, que les fonctions v qui répondent aux valeurs de β' déterminées approximativement par l'équation

$$G' = 0,$$

ont, pour $\alpha'' = 0$, des valeurs finies inégales et peuvent être développées suivant les puissances entières de α''. Les valeurs correspondantes de β seront donc exprimées par des séries de la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^{r} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots$$

$$= h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots,$$

et, par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui répondent à l'équation

$$G' = 0,$$

pourront se développer sous la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} (z-a)^{\frac{rs'}{ss'}} + \gamma_n (z-a)^{\frac{r'}{ss'}} + a_n (z-a)^{\frac{r'+1}{ss'}} + b_n (z-a)^{\frac{r'+2}{ss'}} + \ldots.$$

Si l'équation (2′) avait elle-même des racines égales, on continuerait l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on arrivât à une équation analogue aux équations (2) et (2′) qui n'eût plus de racines égales. De cette manière, on trouvera pour toutes les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, des expressions en séries ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$, et ces développements resteront exacts, tant que le

51..

point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA", etc., pour rayon.

On voit que si l'on appelle μ le nombre des termes du système circulaire auquel la fonction u_n appartient relativement au point A, cette fonction pourra toujours être développée en série convergente suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ dans les limites qu'on vient d'indiquer : en d'autres termes, le dénominateur des exposants fractionnaires de $z-a$, dans ce développement, sera égal au nombre des révolutions que le point Z doit accomplir sur un très-petit contour renfermant le point A, pour que la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Ajoutons d'ailleurs que si l'on se borne à déterminer ce dénominateur par la méthode expliquée précédemment, on pourra ensuite se servir de la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les coefficients des séries dont il s'agit.

24. Appliquons maintenant cette théorie à quelques exemples, et d'abord considérons l'équation binôme

$$u^m-(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales. Pour $z=a$, les m valeurs de u qu'on en tire sont toutes nulles, et comme la dérivée $\frac{df(z,u)}{dz}$ se réduit ici, pour $u=0$, $z=a$, à la quantité $-(a-a')(a-a'')$ etc., qui n'est pas nulle, on tombe sur le cas du n° **18**. On en conclut que les m valeurs de u forment autour du point A un seul système circulaire, et qu'elles peuvent être exprimées par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z est renfermé dans un cercle qui a pour centre le point A et pour rayon la plus petite des distances AA', AA", etc.

25. Prenons pour second exemple l'équation

$$u^m-(z-a)^l(z-a')^{l'}(z-a'')^{l''}\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont toujours supposées inégales, et

où l'exposant l surpasse l'unité. Les m valeurs de u qu'on en tire se réduisent à zéro pour $z = a$, et comme la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ s'annule aussi pour $z = a$, on se trouve dans le cas du n° **19**. Faisons

$$z = a + \alpha, \quad u = \beta;$$

l'équation proposée devient

$$\beta^m - \alpha^l (a - a' + \alpha)^{l'} (a - a'' + \alpha)^{l''} \ldots = 0,$$

où le polynôme A du n° **19** est simplement $\beta^m - B\alpha^l$, en posant, pour abréger,

$$(a - a')^{l'} (a - a'')^{l''} \ldots = B;$$

les groupes G_1, G_2, etc., se réduisent donc à un seul qui est $\beta^m - B\alpha^l$. Appelons φ le plus grand commun diviseur de m et de l, et s le quotient $\frac{m}{\varphi}$; l'équation (2) du même numéro sera ici

$$x^\varphi - B = 0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, on en conclut que les m valeurs de u se partagent relativement au point A en φ systèmes circulaires composés chacun de s termes. De plus, ces diverses valeurs de u peuvent être développées suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{s}}$, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle défini comme au numéro précédent.

26. Considérons, en troisième lieu, l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

qui, pour $z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}$, a une racine double égale à $+ \frac{1}{\sqrt{3}}$, et une racine simple égale à $- \frac{2}{\sqrt{3}}$. Soit A le point qui répond à $z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}$, prenons un point infiniment voisin C pour point de départ de Z, et désignons par u_1, u_2, u_3, trois fonctions satisfaisant à l'équation proposée, dont les deux premières aient des valeurs initiales très-peu

différentes de $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, la valeur initiale de la troisième différant très-peu de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. La fonction u_3 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, qui entoure le point A, n° **7**; pour savoir ce qui arrive aux deux autres, il suffit d'observer que, la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ étant égale à $+1$, on est ici dans le cas du n° **18**, et qu'ainsi les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire, c'est-à-dire que chacune d'elles prend la valeur initiale de l'autre après une révolution du point Z.

Ces deux fonctions pourront donc, n° **21**, être développées en séries suivant les puissances entières de $\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; pour effectuer ces développements, on fera dans l'équation proposée, conformément à la méthode expliquée ci-dessus,

$$z=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\alpha,\quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}+\beta;$$

il viendra

$$\sqrt{3}\beta^2+\beta^3+\alpha=0,$$

ou bien, en posant $\alpha=\alpha'^2$, $\beta=\alpha'v$,

$$\sqrt{3}v^2+1+\alpha'v^3=0.$$

Soient v_1 et v_2 les valeurs de v tirées de cette équation qui, pour $\alpha'=0$, se réduisent respectivement aux quantités finies $+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$, $-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$; pour développer v_1 suivant les puissances entières de α', il suffira de faire dans l'équation précédente

$$v=+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}+A\alpha'+B\alpha'^2+C\alpha'^3+\ldots,$$

puis d'égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de α'. On

aura ainsi les valeurs des coefficients A, B, C, etc., et l'on trouvera

$$v_1 = + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{6}\alpha' - \frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\alpha'^2$$
$$- \frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha'^3 + \frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\alpha'^4 + \frac{7}{162}\alpha'^5 + \ldots;$$

la fonction v_2 s'en déduira en changeant le signe de $\sqrt{-1}$. On conclut de là

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$
$$- \frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$
$$+ \frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{162}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 + \ldots,$$

et en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura u_2.

D'ailleurs l'équation proposée n'acquiert de racines multiples que pour les valeurs $z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z = - \frac{2}{3\sqrt{3}}$: le module de la différence de ces deux nombres, ou la distance des points correspondants A et A' étant $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, la formule précédente sera applicable, tant que le module de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ sera moindre que $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, ou bien tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Dans les mêmes limites, la fonction u_3 pourra se développer suivant les puissances entières de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, et l'on trouvera sans peine

$$u_3 = - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$
$$- \frac{7}{81}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{10}{81\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 + \ldots.$$

27. Pour dernier exemple, nous traiterons encore l'équation

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(u-b)^7 + \mathrm{B}(u-b)^5(z-a) + \mathrm{C}(u-b)^4(z-a)^4 \\ &+ \mathrm{D}(u-b)^2(z-a)^5 + \mathrm{E}(u-b)(z-a)^7 + \mathrm{F}(z-a)^8 \\ &+ \mathrm{G}(u-b)^8 + \mathrm{H}(u-b)^4(z-a)^5 + \mathrm{I}(z-a)^{10} = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients A, B, C, D, E, F sont supposés différents de zéro, et qui a, pour $z = a$, sept racines égales à b.

Le point de départ C de Z étant supposé très-voisin du point A qui répond à $z = a$, il y aura sept fonctions de z satisfaisant à l'équation proposée et ayant des valeurs initiales très-peu différentes de b. Il s'agit de savoir comment les valeurs de ces fonctions s'échangent les unes dans les autres après une révolution de Z sur un contour fermé très-petit CLMC, *fig.* 9, tracé autour du point A.

La dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annulant pour $z = a$, $u = b$, faisons, comme au n° **19**,

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta;$$

l'équation proposée deviendra

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\beta^7 + \mathrm{B}\beta^5\alpha + \mathrm{C}\beta^4\alpha^4 + \mathrm{D}\beta^2\alpha^5 + \mathrm{E}\beta\alpha^7 + \mathrm{F}\alpha^8 \\ &\quad + \mathrm{G}\beta^8 + \mathrm{H}\beta^4\alpha^5 + \mathrm{I}\alpha^{10} = 0. \end{aligned}$$

Le polynôme A est ici

$$\mathrm{A}\beta^7 + \mathrm{B}\beta^5\alpha + \mathrm{C}\beta^4\alpha^4 + \mathrm{D}\beta^2\alpha^5 + \mathrm{E}\beta\alpha^7 + \mathrm{F}\alpha^8:$$

construisons les points M_0, $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_5$ correspondants aux différents termes de A et qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} &x_0 = 7, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 4, \quad y_2 = 4; \\ &x_3 = 2, \quad y_3 = 5; \quad x_4 = 1, \quad y_4 = 7; \quad x_5 = 0, \quad y_5 = 0. \end{aligned}$$

Cela fait, nous verrons aisément que la droite $\mathrm{M}_0\mathrm{O}$ étant supposée tourner autour du point M_0 de manière à couper la partie positive de l'axe des y, rencontrera d'abord le point M_1; que cette même droite, tournant ensuite autour de M_1, rencontrera le point M_3 avant tous les autres; et, enfin, que cette droite, en tournant autour de M_3, arrivera à contenir à la fois les points M_4 et M_5. Les groupes G seront

donc au nombre de trois, savoir :

$$G_1 = A\beta^7 + B\beta^2\alpha^5,$$
$$G_2 = B\beta^5\alpha + D\beta^2\alpha^3,$$
$$G_3 = D\beta^2\alpha^3 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9.$$

Pour le premier, on a

$$s = 2, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) du nº **19** est

$$Ax + B = 0 :$$

à ce groupe répondent, par conséquent, deux fonctions de u et de z qui forment un système circulaire autour du point A, et qui, dans certaines limites, se développent en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$.

Pour le deuxième groupe, on a

$$s = 3, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) est

$$Bx + D = 0 :$$

à ce groupe répond donc un système circulaire composé de trois fonctions qui se développent suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{3}}$.

Pour le troisième, on a

$$s = 1, \quad \varphi = 2,$$

et l'équation (2) est

$$Dx^2 + Ex + F = 0.$$

Admettons d'abord que cette équation ait ses racines inégales; alors à ce groupe répondront deux systèmes circulaires d'un seul terme chacun, c'est-à-dire deux fonctions de z dont chacune reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et qui peuvent se développer suivant les puissances entières de $z-a$. Admettons ensuite que l'équation (2) ait ses racines égales, de sorte qu'on ait à la fois

$$Dh^2 + Eh + F = 0, \quad 2Dh + E = 0.$$

C'est ici le cas du n° **20**; comme on a

$$r=2, \quad s=1,$$

on fera

$$\alpha=\alpha', \quad \beta=h\alpha'^2+\beta':$$

en substituant ces valeurs dans l'équation entre α et β mise sous la forme

$$\alpha^5(D\beta^2+E\beta\alpha^2+F\alpha^4)+A\beta^7+B\beta^5\alpha+C\beta^4\alpha^4$$
$$+G\beta^8+H\beta^4\alpha^5+I\alpha^{10}=0,$$

il viendra, en laissant la lettre α au lieu de α',

$$D\beta'^2\alpha^5+A(h^7\alpha^{14}+\ldots)+B(h^5\alpha^{11}+\ldots)+C(h^4\alpha^{12}+\ldots)$$
$$+G(h^8\alpha^{16}+\ldots)+H(h^4\alpha^{13}+\ldots)+I\alpha^{10}=0.$$

Dans chaque parenthèse, les termes non écrits sont d'un ordre plus élevé que le terme conservé, attendu que β' est d'un ordre supérieur à celui de α^2. On voit que les groupes G' se réduiront à un seul, qui sera

$$D\beta'^2\alpha^5+I\alpha^{10},$$

en supposant que I ne soit pas nul. On aura alors

$$r'=5, \quad s'=2, \quad \varphi'=1,$$

et l'équation ($2'$) sera

$$Dx'+I=0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, puisqu'elle est du premier degré, et qu'on a

$$ss'=2,$$

on voit que les deux valeurs de u qui correspondent au groupe G_3 forment un seul système circulaire, et que chacune d'elles est développable en série suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$. Mais si le coefficient I était nul, le groupe G' serait

$$D\beta'^2\alpha^5+Bh^5\alpha^{11}:$$

on aurait alors

$$r'=3, \quad s'=1, \quad \varphi'=2,$$

et l'équation ($2'$) serait

$$Dx'^2 + Bh^3 = 0.$$

Comme elle a ses racines inégales et que le produit ss' se réduit à l'unité, on voit que, dans ce cas, chacune des valeurs de u qui répondent au groupe G_2 reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et que ces deux valeurs peuvent être développées en séries suivant les puissances entières de $z - a$.

28. Nous avons cherché, dans ce qui précède, comment s'échangent entre elles les valeurs des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, lorsque le point Z décrit autour du point A un contour infiniment petit; il y a encore un autre cas qu'il est à propos d'examiner spécialement.

Prenons pour point de départ de Z un point C correspondant à une valeur quelconque c de z, avec la condition, toutefois, que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

n'ait pas de racines égales; soient toujours A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs a, a', a'', etc., de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et supposons que l'équation

$$f(u, a) = 0$$

ait p racines égales à b. Joignons le point C au point A par une ligne CDA, *fig.* 12, tracée arbitrairement, mais de manière à ne passer par aucun des points A, A', A'', etc.; puis désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui, satisfaisant à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et ayant au point C les valeurs initiales $b_1, b_2, \ldots, b_p$, acquièrent en A la valeur commune b, lorsque Z y arrive par le chemin CDA. Prenons sur cette ligne un point D infiniment voisin de A, et imaginons un contour fermé infiniment petit DNPD qui entoure le point A, en ne faisant autour de ce point qu'une circonvolution. Cela posé, nous donnerons le nom de *contour élémentaire* au contour qui se compose

de la ligne CD, du contour infiniment petit DNP, et, enfin, de la ligne DC, de sorte que le point Z, en le parcourant, décrit deux fois la ligne CD, mais dans des sens contraires.

Voyons maintenant ce que deviennent les fonctions u_1, u_2,..., u_p après une révolution de Z sur un pareil contour : soient d'abord β_1, β_2,..., β_p les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z arrive pour la première fois en D. Le point mobile parcourt ensuite le contour infiniment petit DNPD ; or on a prouvé que les fonctions u_1, u_2,..., u_p pouvaient se partager, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires : soit u_1, u_2,..., u_{n-1}, u_n un de ces systèmes, de façon qu'après une révolution de Z sur DNPD, les fonctions qui le composent aient acquis respectivement les valeurs β_2, β_3,..., β_n, β_1. Lorsqu'ensuite le point Z, achevant de décrire le contour élémentaire, ira de D en C, la fonction u_1, qui avait en D la valeur β_2, prendra en C la valeur b_2; car autrement, si Z revenait en arrière au point D, u_1 ne reprendrait pas la valeur β_2 : de même les fonctions u_2,..., u_{n-1}, u_n acquerront en C les valeurs b_3,..., b_n, b_1. Par conséquent, les fonctions u_1, u_2,..., u_p jouiront, par rapport au contour élémentaire CDNPDC, des mêmes propriétés qui ont été démontrées pour le contour infiniment petit DNPD. Les systèmes circulaires seront dans les deux cas en même nombre et composés des mêmes termes rangés dans le même ordre : on les déterminera toujours en cherchant, par la méthode expliquée ci-dessus, les valeurs approchées des fonctions u_1, u_2, etc., pour une valeur de z infiniment peu différente de a.

Quant aux fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs au point A sont des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

il est clair, n° 7, qu'après une révolution de Z sur le contour élémentaire CDNPDC, chacune d'elles reprend simplement sa valeur initiale.

29. Supposons maintenant que le point Z, partant du point C, décrive autour du point A une ligne fermée de forme quelconque, mais qui puisse se réduire au contour élémentaire CDNPDC sans franchir

aucun des points A, A'; A'', etc. : on conclura du n° 6 que les valeurs des fonctions u_1, u_2, etc., s'échangeront sur cette ligne absolument comme sur le contour élémentaire.

30. Joignons le point C aux différents points A, A', A'', etc., par des lignes CDA, CD'A', CD''A'', etc., *fig.* 12, tracées arbitrairement, sauf la condition que la ligne menée à chacun de ces points ne passe par aucun des autres : soient D, D', D'', etc., des points situés sur ces lignes à des distances infiniment petites des points A, A', A'', etc.; traçons autour de ces derniers les contours fermés infiniment petits DNPD, D'N'P'D', D''N''P''D'', etc., et imaginons les contours élémentaires CDNPDC, CD'N'P'D'C, CD''N''P''D''C, etc., que nous désignerons, pour abréger, par les notations (A), (A'), (A''), etc. Cela posé, étant donné un contour fermé quelconque passant par le point C, on pourra toujours, sans lui faire franchir aucun des points A, A', A''; etc., et sans déplacer le point C, le déformer de façon à le réduire à une suite de contours élémentaires. Cette assertion n'a pas besoin d'être démontrée, et il suffit d'un peu d'attention pour en apercevoir l'exactitude.

Par exemple, le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira au contour élémentaire CDNPDC ou (A). Le contour CLMC de la *fig.* 14 se réduira au contour (A) parcouru deux fois de suite. Le contour CLMC de la *fig.* 15 se réduira aux trois contours (A), (A'), (A''), parcourus successivement. Enfin le contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite des contours élémentaires (A'), (A''), (A'), (A), (A'). Sous ce point de vue, un contour fermé quelconque passant par le point C sera caractérisé par la série des contours élémentaires auxquels on peut le réduire.

Toutefois il importe d'indiquer dans quel sens chaque contour élémentaire est parcouru : pour cela nous représenterons le contour (A) par (+ A) ou par (— A), suivant que le point Z sera supposé le parcourir dans le sens direct ou dans le sens inverse, n° **18**, et nous ne conserverons la notation (A) que pour le cas où il sera inutile d'indiquer dans quel sens ce contour est décrit. Ainsi le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira à (+ A) ou à (— A), suivant que le point Z le parcourra dans le sens CLMC ou dans le sens CMLC : de même, le

contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite $(+A')$, $(+A'')$, $(-A')$, $(-A)$, $(+A')$, s'il est parcouru dans le sens CLMC, et à la suite $(-A')$, $(+A)$, $(+A')$, $(-A'')$, $(-A')$, s'il est parcouru en sens contraire. (On peut observer que pour déduire cette seconde suite de la première, il suffit de renverser l'ordre des termes et de changer leurs signes : cette remarque est générale.)

Ces notations adoptées, un contour fermé passant par le point C et parcouru dans un sens déterminé, pourra, quelle que soit sa forme [*], être représenté par la suite des contours élémentaires auxquels on le réduit en le déformant : cette suite, dont chaque terme doit être affecté d'un signe convenable, ainsi qu'on vient de l'expliquer, est ce que nous appellerons la *caractéristique du contour*. Ainsi les contours CLMC des *fig.* 13, 14, 15, 16 étant supposés parcourus dans le sens CLMC, auront pour caractéristiques respectives

$$(+A),\quad (+A)(+A),\quad (+A)(+A')(+A''),$$
$$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A'),$$

et, s'ils sont parcourus dans le sens contraire, leurs caractéristiques seront

$$(-A),\quad (-A)(-A),\quad (-A'')(-A')(-A),$$
$$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

Dans le cas où un contour fermé pourra se réduire au seul point C sans franchir aucun des points A, A′, A″, etc., nous lui donnerons (o) pour caractéristique : il est clair qu'on est libre d'introduire ou de supprimer dans la caractéristique d'un contour des termes (o) en tel nombre et à telles places qu'on voudra.

On voit facilement que les points A, A′, A″, etc., restant les mêmes ainsi que le point C et les lignes CDA, CD′A′, CD″A″, etc., un même contour, parcouru dans un même sens, n'est susceptible que d'une seule caractéristique (sauf les termes (o) qu'on peut toujours supprimer). Deux contours qui ont la même caractéristique peuvent toujours se réduire l'un à l'autre sans franchir aucun des points A, A′,

[*] On exclut toujours le cas où ce contour passerait par quelqu'un des points A, A′, A″, etc.

A'', etc.; et, au contraire, deux contours qui, dans quelque sens qu'on les suppose parcourus, ont des caractéristiques différentes, ne peuvent pas se réduire l'un à l'autre. Observons encore que si les lignes CDA, CD'A', CD''A'', etc., viennent à changer de forme, la caractéristique d'un contour donné restera la même, tant que ces lignes ne franchiront aucun des points A, A', A'', etc.

31. De ce qu'on vient de dire et de la proposition énoncée au n° **6**, on conclut que si deux contours fermés passant par le point C ont la même caractéristique, la fonction u_1 de z, déterminée par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

et par une valeur initiale b_1 choisie parmi les racines de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

acquerra une seule et même valeur, lorsque le point Z, parti de la position C, y reviendra après avoir parcouru l'un ou l'autre de ces deux contours, ou bien encore la suite des contours élémentaires représentés par leur caractéristique commune.

Si donc on appelle $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et ayant respectivement pour valeurs initiales les m racines $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

il sera facile de savoir quelle valeur prend chacune de ces fonctions, lorsque le point Z revient en C après avoir parcouru un contour fermé dont la caractéristique est donnée.

En effet, substituons au contour proposé la série des contours élémentaires représentés par les différents termes de la caractéristique : après que le point Z aura parcouru le premier de ces contours, la fonction u_n aura acquis une valeur b_p qu'on saura déterminer, n° **28** ; il suffira pour cela de savoir quelle est la fonction qui suit ou qui précède u_n dans le système circulaire dont elle fait partie relativement à celui des points A, A', etc., qui est renfermé dans le contour élé-

mentaire. Soit maintenant b_q la valeur que prend la fonction u_p apres une révolution de Z sur le deuxième contour élémentaire; il est clair que u_n acquerra cette même valeur b_q, lorsque Z aura décrit les deux premiers. Pareillement, sachant quelle est la valeur b_r que prend u_q après une révolution de Z sur le troisième contour élémentaire, on en conclura que u_n acquiert cette même valeur b_r après que Z a décrit les trois premiers contours. En continuant ainsi, on trouvera la valeur que prend la fonction u_n, quand le point Z a parcouru tous les contours élémentaires dont se compose la caractéristique, ou, ce qui est la même chose, quand ce point a parcouru le contour proposé.

32. Prenons pour exemple l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

dont nous nous sommes déjà occupés. Les valeurs de z qui lui font acquérir des racines égales sont $+\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et correspondent à deux points A et A' situés sur l'axe des x à une distance $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ de l'origine des coordonnées et de part et d'autre. Choisissons cette origine C pour point de départ de Z et nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation proposée, et dont les valeurs initiales sont respectivement 0, $+1$, -1. Prenons les droites CA, CA' pour les lignes avec lesquelles les contours élémentaires (A) et (A') se confondent sensiblement, n° **28** : lorsque Z va de C en A par la droite CA, les trois valeurs de u restent réelles, et de l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{1-3u^2},$$

on conclut que u_1 augmente, tandis que u_2 et u_3 vont en diminuant. Au point A, on a

$$u_1 = u_2,$$

et, ainsi qu'on l'a vu plus haut, n° **26**, ces deux fonctions forment autour de ce point un système circulaire; par conséquent, apres une révolution de Z sur le contour élémentaire $(\pm A)$, chacune des fonctions u_1, u_2, a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_3 a repris

sa propre valeur initiale. On trouve de même, après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(\pm A')$, que chacune des fonctions u_1, u_2 a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_3 a repris sa propre valeur initiale. De là on conclut sur-le-champ la valeur que prend une quelconque de ces fonctions après une révolution de Z sur un contour fermé dont on connaît la caractéristique.

Ainsi, proposons-nous de trouver la valeur de u_1 après une révolution de Z sur le contour

$$(\pm A)(\pm A')(\pm A)(\pm A)(\pm A)(\pm A'):$$

ici, comme dans tous les cas où les systèmes circulaires n'ont qu'un ou deux termes, le signe + ou le signe −, qui accompagne la caractéristique de chaque contour élémentaire, est indifférent. Après une révolution sur le contour $(\pm A)$, u_1, qui était d'abord égale à zéro, a pris la valeur initiale $+1$ de u_2; la fonction garde cette même valeur après que Z a décrit le contour $(\pm A')$; ensuite les trois révolutions sur le contour $(\pm A)$ lui font acquérir successivement les valeurs 0, $+1$, 0; enfin la révolution de Z sur le contour $(\pm A')$ fait prendre à la fonction la valeur -1.

33. Considérons encore l'équation

$$u^3 - (z - a)(z - a')^2 = 0,$$

dont les racines deviennent égales pour $z = a$ et pour $z = a'$. Appelons g une des trois valeurs du radical $\sqrt[3]{-aa'^2}$; les trois valeurs de u pour $z = 0$ seront

$$g, \quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}, \quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, prenons pour point de départ de Z l'origine C des coordonnées; puis nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation précédente, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g, \quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}, \quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On voit sans peine que ces fonctions u_1, u_2, u_3 formeront un système

circulaire relativement au point A, et que les mêmes fonctions rangées dans l'ordre u_1, u_3, u_2, en formeront un relativement au point A'.

Si, maintenant, on veut savoir ce que devient u_1, après que Z a décrit un contour fermé quelconque, par exemple celui qui a pour caractéristique

$$(-\mathrm{A})(+\mathrm{A}')(+\mathrm{A})(+\mathrm{A}')(-\mathrm{A})(-\mathrm{A})(-\mathrm{A}'),$$

il suffira d'observer qu'après que Z a décrit successivement chacun des contours élémentaires indiqués par la caractéristique, u_1, qui avait d'abord la valeur g, a pris les valeurs

$$ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad g,\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad g.$$

ainsi la fonction u_1 se trouve avoir repris sa valeur primitive.

34. Après avoir montré ce que devient la fonction u_1, lorsque le point Z revient à sa position initiale après avoir décrit un contour fermé quelconque, il nous faut examiner maintenant quelles valeurs acquiert cette fonction, suivant que le point Z va de son point de départ C à un autre point déterminé K, *fig.* 17, par un chemin ou par un autre. Nous excluons toujours les chemins qui passeraient par quelqu'un des points A, A', A'', etc.

Les valeurs initiales des fonctions u_1, u_2,..., u_m, étant toujours désignées par b_1, b_2,..., b_m, appelons h_1, h_2,..., h_m les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z va de C en K par un chemin déterminé CMK; il s'agit de trouver quelles valeurs acquièrent ces mêmes fonctions, lorsque Z va de C en K par un autre chemin quelconque CLK.

Pour cela, observons que les deux chemins CLK, CMK, réunis, composent un contour fermé CLMC, dont la caractéristique, que nous représenterons par (Γ), sera connue dès que ces deux chemins seront donnés. Or la fonction u_i acquerra la même valeur au point K, soit que le point Z y aille par le chemin CLK, soit qu'il y aille en décrivant d'abord le contour fermé CLMC, puis la ligne CMK; car le second chemin se réduit au premier sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. Mais on saura, par ce qui précède, quelle est la fonction u_j dont u_i prend la valeur initiale b_j après une révolution de Z

sur le contour fermé CLMC; on en conclura donc que la fonction u_i acquiert au point K la valeur h_j, quand le point Z y arrive par le chemin CLMC + CMK, ou, ce qui est la même chose, par le chemin CLK : c'est la réponse à la question que nous voulions résoudre.

A ce point de vue, le chemin CLK sera suffisamment désigné par la notation $(\Gamma) +$ CMK, dont nous nous servirons par la suite, et que nous appellerons la caractéristique de ce chemin. Quand, par le procédé du n° **16**, on aura déterminé les valeurs $h_1, h_2,\ldots, h_m$ que les fonctions $u_1, u_2,\ldots, u_m$ acquièrent au point K, lorsque Z y va par le chemin CMK, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de recommencer ce calcul pour un autre chemin quelconque $(\Gamma) +$ CMK. Il suffira d'avoir effectué le partage des fonctions $u_1, u_2,\ldots, u_m$, en systèmes circulaires relativement à chacun des points A, A', A", etc., et alors on pourra assigner immédiatement quelle est celle des quantités $h_1, h_2,\ldots, h_m$, à laquelle la fonction u_i devient égale, lorsque Z a parcouru le chemin $(\Gamma) +$ CMK.

Par exemple, reprenons l'équation

$$u^3 - u + z = 0;$$

les fonctions u_1, u_2, u_3 étant définies comme au n° **32**, appelons h_1, h_2, h_3 les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque le point Z va de C en K par un chemin déterminé CMK. Ces quantités une fois calculées, si l'on veut savoir quelles valeurs prennent nos trois fonctions, lorsque Z va de C en K par le chemin $(\pm A)(\pm A') +$ CMK, il suffit d'observer qu'après une révolution de Z sur le contour fermé $(\pm A)(\pm A')$, u_1, u_2, u_3 ont acquis respectivement les valeurs initiales de u_2, u_3, u_1; on en conclut que les valeurs demandées sont h_2, h_3, h_1.

33. On peut rendre plus sensible la marche de la fonction u, en imaginant un point U dont l'abscisse et l'ordonnée soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de u. En même temps que Z décrit une ligne continue, U en décrit une aussi qui est parfaitement déterminée, si Z ne passe par aucun des points A, A', A", etc.

Concevons que Z aille de C en K par plusieurs chemins différents : la fonction u pourra acquérir des valeurs différentes, et parmi les valeurs $h_1, h_2,\ldots, h_m$ qu'elle peut avoir pour $z = k$, on a appris

à distinguer celle qu'elle prend, suivant que Z a suivi tel ou tel chemin. Par conséquent, le point U pourra arriver à différentes positions dans ces différents cas, et, parmi les points $H_1, H_2, \ldots, H_m$, qui correspondent aux quantités $h_1, h_2, \ldots, h_m$, on saura distinguer celui avec lequel U vient coïncider, lorsqu'on connaîtra le chemin suivi par Z.

Par exemple, si Z décrit un contour fermé de façon à revenir à son point de départ C, il pourra arriver que la fonction u reprenne ou ne reprenne pas sa valeur initiale : dans le premier cas, le point U aura décrit lui-même un contour fermé; mais, dans le second, il ne sera pas revenu à sa position primitive.

36. Nous avons toujours supposé jusqu'ici que Z ne passait par aucun des points pour lesquels la fonction u devient une racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Admettons maintenant que Z vienne à passer par un point A, pour lequel les p fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ acquièrent une même valeur b. Avant que Z arrivât en A, ces fonctions avaient pour valeurs p quantités inégales très-peu différentes de b; lorsqu'ensuite Z a dépassé le point A, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournit encore p valeurs de u inégales et très-voisines de b; mais il n'y a pas de raison d'attribuer chacune de ces valeurs à l'une plutôt qu'à l'autre des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Ainsi, au delà du point A, on trouve bien encore p fonctions distinctes de z comme avant; mais la question de savoir laquelle de ces fonctions doit être regardée comme la continuation d'une fonction particulière u_1, reste tout à fait indéterminée.

L'exemple suivant rendra plus sensible ce genre d'indétermination. Faisons décrire à Z, à partir du point C et dans le sens direct, un cercle CLAMC, *fig.* 18, passant par le point A, pour lequel les fonctions u_1 et u_2 deviennent égales entre elles, et supposons que ces fonctions ne puissent devenir égales pour aucun autre point situé sur la circonférence ou dans son intérieur. Soit b leur valeur commune

au point A, de sorte que pour $z = a$, $u = b$, on ait

$$f(u, z) = 0, \quad \frac{df(u, z)}{du} = 0;$$

mais admettons que, pour les mêmes valeurs de z et de u, les dérivées $\frac{d^2 f(u, z)}{du^2}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ se réduisent à des quantités A et B différentes de zéro. Si l'on fait

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}}, \quad u_1 = b + \beta_1, \quad u_2 = b + \beta_2,$$

les quantités β_1 et β_2 s'annuleront en même temps que ρ, et se confondront sensiblement, pour de petites valeurs de ρ, avec les deux racines de l'équation du second degré

$$A\beta^2 + B\rho e^{\tau\sqrt{-1}} = 0,$$

ou

$$\beta^2 = h\rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

en faisant

$$-\frac{B}{A} = h.$$

On en conclut

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

et si l'on pose

$$(h\rho)^{\frac{1}{2}} = \gamma e^{\delta\sqrt{-1}},$$

γ désignant un nombre positif et δ un angle réel, puis

$$\delta + \frac{\tau}{2} = v_1, \quad \delta + \frac{\tau + 2\pi}{2} = v_2,$$

on aura approximativement, dans les environs du point A,

$$u_1 = b + \gamma e^{v_1\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + \gamma e^{v_2\sqrt{-1}}.$$

Prenons maintenant sur la circonférence CLMC deux points L et M très-voisins de A, et situés de part et d'autre de ce point. Soit B le point correspondant à la valeur commune b que prennent les deux fonctions u_1, u_2, quand le point Z arrive en A; lorsque Z est en L, ces mêmes

fonctions ont des valeurs inégales correspondantes à des points N et P voisins de B, et tels, que les directions BN, BP soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre, attendu qu'on a

$$v_2 = v_1 + \pi.$$

Lorsqu'ensuite le point Z est en M, les points Q et R, correspondants aux valeurs des deux fonctions, sont encore très-voisins du point B, et tels aussi, que les directions BQ, BR soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre. Mais comme, en passant du point L au point M, on fait varier τ de $\pm\pi$, et qu'ainsi chacun des angles v_1, v_2 varie de $\pm\frac{\pi}{2}$, les directions BQ, BR seront sensiblement perpendiculaires aux directions BN, BP.

Concevons à présent que Z aille de L en M en passant par le point A, les points U_1, U_2, correspondants aux fonctions u_1, u_2, et situés d'abord en N et P, se rapprocheront l'un de l'autre, se confondront en B, lorsque Z arrivera en A, puis se sépareront pour venir en Q et R; mais si l'on attribue le point N à la fonction u_1, et le point P à la fonction u_2, il n'y aura pas de raison d'attribuer chacun des points Q et R à une de ces fonctions plutôt qu'à l'autre.

En effet, déformons infiniment peu le chemin par lequel Z va de L en M, de façon qu'il ne passe plus par le point A; selon que le point A sera en dehors ou en dedans du contour fermé CLMC, il arrivera ou que le point U_1 ira de N en Q, et le point U_2 de P en R, ou que le point U_1 ira de N en R et le point U_2 de P en Q.

Pour le voir, supposons d'abord, *fig.* 19, le point A extérieur au contour CLMC, mais très-voisin de ce contour : prenons sur celui-ci les deux points L et M très-voisins de A, de façon toutefois que les directions AL, AM fassent un angle très-voisin de 180 degrés. Alors, quand le point Z ira de L en M, τ diminuera sensiblement de π, et, par suite, v_1 et v_2 diminueront sensiblement de $\frac{\pi}{2}$: le point U_1 ira donc de N en Q par la ligne NFQ, et le point U_2 de P en R par la ligne PGR.

Si, au contraire, le point A est intérieur, *fig.* 20, les points L et M étant pris comme tout à l'heure, l'angle τ augmentera sensiblement de π, lorsque Z ira de L en M; par suite, v_1 et v_2 augmenteront de $\frac{\pi}{2}$:

U_1 ira donc de N en R par le chemin NFR, tandis que U_2 ira de P en Q par le chemin PGQ.

Les *fig.* 18, 19 et 20 montrent comment se modifient les lignes décrites par les points U_1 et U_2, lorsque le contour CLMC, en se déformant, vient à franchir le point A. Tant qu'il ne le renferme pas, chacun des points U_1, U_2 décrit une ligne fermée, *fig.* 19, l'un la ligne SNFQS, l'autre la ligne TGPRT; ces deux lignes passent très-près du point B et présentent dans cette région comme deux angles droits opposés.

Lorsque le contour CLMC vient à passer au point A, *fig.* 18, ces deux lignes se réunissent en une seule pour laquelle le point B est un point multiple; les branches qui y aboutissent s'y coupent à angles droits. Les points U_1 et U_2 arrivent en B en décrivant les lignes NB, PB; mais ensuite, comme on l'a déjà dit, on peut regarder l'un des deux à volonté comme décrivant la ligne BQ et l'autre comme traçant la ligne BR.

Enfin, lorsque le contour CLMC vient à renfermer le point A, *fig.* 20, les lignes décrites par les points U_1 et U_2 deviennent les deux parties d'un même contour fermé. Ce contour présente un étranglement aux environs du point B, et les parties qui avoisinent cette région forment encore comme deux angles droits opposés. Si S et T sont les positions initiales de U_1 et de U_2, pendant que Z décrira le contour CLMC, le point U_1 tracera l'arc SNFRT, et le point U_2 l'arc TPGQS; ce n'est qu'apres deux révolutions de Z que les points U_1 et U_2 reprendraient leurs positions initiales S et T [*].

On verra de même ce qui arrive, lorsque le contour CLMC franchit un point A pour lequel trois fonctions u_1, u_2, u_3 acquièrent une valeur commune b. Si l'on suppose que les dérivées $\frac{d^2 f(u, z)}{du^2}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annulent pour $z = a$, $u = b$, les valeurs approchées de ces fonc-

[*] Si le contour CLMC avait un point saillant, que ce point coincidât avec le point A, et que les deux portions de contour aboutissant en A fissent un angle égal à θ, la ligne decrite par les points U_1, U_2 offrirait encore en B un point multiple; mais l'angle des branches qui se coupent en B, au lieu d'etre droit comme dans la *fig.* 18, serait égal à $\frac{\theta}{2}$.

tions pour des valeurs de z voisines de a seront

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{3}\sqrt{-1}},$$
$$u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau+2\pi}{3}\sqrt{-1}},$$
$$u_3 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau+4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On en conclura, en raisonnant comme on vient de le faire, que si le point A est hors du contour CLMC, mais très-près, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrira une courbe fermée, *fig.* 21, passant très-près du point B. Si le contour vient à passer par le point A, ces trois courbes se réunissent en une seule, *fig.* 22, ayant en B un point multiple où passent trois branches qui s'y coupent sous des angles de 60 degrés. Enfin, si le point A devient intérieur au contour, cette ligne unique ne passe plus au point B; mais elle a aux environs de ce point la forme qu'indique la *fig.* 23 : pendant une révolution de Z sur le contour CLMC, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrit une portion de la ligne dont il s'agit, de façon que ces trois portions composent la ligne entière; ce n'est qu'après trois révolutions de Z que ces points reviennent à leurs positions initiales.

37. Nous avons supposé, à partir du n° **18**, que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme entier $f(u, z)$ était indépendant de z : mais il est aisé d'étendre la théorie précédente au cas où ce coefficient est une fonction entière quelconque de z. Considérons, en effet, l'équation irréductible

$$Nv^m + Pv^{m-1} + Qv^{m-2} + \ldots + Sv + T = 0,$$

où N, P, Q,..., T désignent des polynômes entiers en z, et proposons-nous, comme nous l'avons fait pour la fonction u, de distinguer les diverses valeurs que la fonction v peut acquérir, suivant que le point Z va par tel ou tel chemin de sa position initiale C à une autre position K.

On ramènera sur-le-champ ce cas à celui que nous avons traité, en posant

$$v = \frac{u}{N}:$$

en effet, l'équation proposée deviendra

$$u^m + P u^{m-1} + N Q u^{m-2} + \ldots + N^{m-2} S u + N^{m-1} T = 0,$$

où le coefficient de u^m est l'unité. Le polynôme N n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur de z, aux diverses valeurs dont la fonction u est susceptible correspondront autant de valeurs de v qui s'en déduiront par la formule

$$v = \frac{u}{N}.$$

Tout se réduira donc, comme ci-dessus, à déterminer les caractéristiques des divers chemins par lesquels on peut aller de C en K, et, pour les connaître, il n'y aura qu'à construire les points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$u^m + P u^{m-1} + \ldots + N^{m-1} T = 0.$$

Observons qu'il ne serait pas exact de déterminer ces points en cherchant les valeurs de z pour lesquelles l'équation en v acquiert des racines égales : car, bien qu'en général ces valeurs de z soient les mêmes, il peut en être autrement de celles qui annulent N; pour ces valeurs, l'équation en u a $m-1$ racines égales à zéro, tandis que l'équation en v a ordinairement une racine infinie et $m-1$ racines finies et inégales. Mais on trouvera toujours tous les points A, A', A'', etc., en joignant aux valeurs de z qui font acquérir à l'équation en v des racines égales celles qui lui donnent des racines infinies.

38. On a vu que les diverses fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ qui satisfont à l'équation

$$u^m + P u^{m-1} + N Q u^{m-2} + \ldots = 0,$$

se partagent, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires; les fonctions correspondantes

$$v_1 = \frac{u_1}{N}, \quad v_2 = \frac{u_2}{N}, \ldots, \quad v_m = \frac{u_m}{N},$$

formeront évidemment des systèmes circulaires correspondants et en même nombre. Appelons ν la puissance de $z - a$ par laquelle le

polynôme N est divisible, l'exposant entier ν pouvant être zéro, et faisons

$$N = (z - a)^\nu N;$$

nous aurons, en désignant par v_n une des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_m$,

$$v_n = \frac{u_n}{(z-a)^\nu N},$$

d'où

$$(z - a)^\nu v_n = \frac{1}{N} \cdot u_n.$$

Or, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon, on peut développer $\frac{1}{N}$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - a$; on a vu d'ailleurs, n° **25**, que μ étant le nombre des termes du système circulaire dont u_n fait partie, cette fonction u_n peut, dans les mêmes limites, être développée suivant les puissances entières et positives de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$. En multipliant ces deux séries, on aura le développement de $\frac{1}{N} \cdot u_n$ suivant les puissances entières et positives de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$: nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{N} \cdot u_n = (z - a)^\nu v_n = A + B(z - a)^{\frac{1}{\mu}} + C(z - a)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

A, B, C, etc., désignant des coefficients indépendants de z, et, par conséquent,

$$v_n = A(z - a)^{-\nu} + B(z - a)^{\frac{1}{\mu} - \nu} + C(z - a)^{\frac{2}{\mu} - \nu} + \ldots.$$

Ainsi la fonction v_n se développe comme u_n, suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$; mais, tandis que le développement de u_n ne contient que des puissances positives de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$, celui de v_n peut commencer par un nombre limité de puissances négatives.

59. Appliquons ce qui vient d'être dit à l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots v^m - 1 = 0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales; si l'on pose

$$v = \frac{u}{(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots},$$

il viendra

$$u^m - (z-a)^{m-1}(z-a')^{m-1}(z-a'')^{m-1}\ldots = 0.$$

Les points A, A', A'', etc., pour lesquels cette équation acquiert des racines multiples, sont précisément ceux qui répondent aux valeurs a, a', a'', etc., de z.

Appelons u_1, u_2,..., u_m les m fonctions qui satisfont à l'équation en u, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g,\quad ge^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}},\quad ge^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}},\ldots,\quad ge^{-\frac{(2m-2)\pi}{m}\sqrt{-1}},$$

g désignant une des valeurs du radical

$$\sqrt{(c-a)^{m-1}(c-a')^{m-1}(c-a'')^{m-1}\ldots}.$$

On déduit facilement des principes établis plus haut, que chacune de ces fonctions acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires (+ A), (+ A'), etc. Si donc on pose

$$v_1 = \frac{u_1}{(z-a)(z-a')\ldots},\quad v_2 = \frac{u_2}{(z-a)(z-a')\ldots},\ldots,$$

il en sera de même des fonctions v_1, v_2, etc.

D'après cela, si l'on appelle h_1, h_2,..., h_m les valeurs que les fonctions v_1, v_2,..., v_m acquièrent au point K, lorsque Z y arrive par le chemin CMK, et si l'on demande les valeurs qu'obtiennent ces mêmes fonctions, lorsque Z arrive en K par le chemin (+ A)(+ A') + CMK, on trouvera que v_1 prend la valeur h_2, v_2 la valeur h_4, et ainsi de suite jusqu'à v_{m-1} et v_m, qui prenne les valeurs h_1 et h_2. De même, si Z arrivait en K par le chemin (− A) + CMK, v_1, v_2,..., v_m acquerraient respectivement les valeurs h_m, h_1,..., h_{m-1}.

54..

Ajoutons que les fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_m$ seront développables en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA", etc., pour rayon, et que ces développements renfermeront la puissance négative $(z-a)^{-\frac{1}{m}}$.

40. Nous n'avons parlé, dans tout ce qui précède, que des équations algébriques; mais les propositions que nous avons établies s'appliquent à l'équation transcendante

$$f(u, z) = 0,$$

pourvu que le premier membre $f(u, z)$ et ses dérivées partielles des divers ordres, prises par rapport à u et à z, soient des fonctions continues de u et de z, et n'aient pour chaque système de valeurs de ces variables qu'une seule valeur finie et déterminée. En effet, M. Cauchy a établi (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les valeurs de u, tirées d'une telle équation, varient d'une manière continue lorsque z varie d'une manière continue. Or c'est là, avec les conditions qu'on vient d'énoncer, la seule chose que suppose notre théorie.

41. On peut encore la généraliser en supposant, non plus

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

mais

$$z = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1};$$

nous désignons ici par $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions continues qui n'ont pour chaque système de valeurs de x et de y, ou, si l'on veut, pour chaque point du plan xy, qu'une valeur réelle finie et déterminée. Pour chaque point du plan, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournira encore des valeurs de u généralement inégales, et l'on pourra se demander ce que devient chacune d'elles en variant d'une manière

continue, tandis que le point qui a pour coordonnées x et y passe d'une position initiale C à une autre position K.

Dans ce but, on déterminera d'abord les points correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines infinies ou multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Si $f + g\sqrt{-1}$ désigne une pareille valeur, les coordonnées des points correspondants seront fournies par le système des deux équations

$$\varphi(x, y) = f, \quad \psi(x, y) = g.$$

Si maintenant on suppose que le point (x, y) aille de C en K par un chemin déterminé, la valeur que la fonction u acquiert au point K restera la même, lorsqu'on viendra à déformer le chemin parcouru, tant que ce chemin ne franchira aucun point pour lequel la fonction u devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation proposée. La démonstration est exactement la même que celle qui a été donnée plus haut pour le cas de $z = x + y\sqrt{-1}$.

Ensuite, si en un point A un certain nombre des fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales entre elles, on prouvera encore, comme précédemment, que ces fonctions se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires, c'est-à-dire que les fonctions qui composent un de ces systèmes étant disposées convenablement sur un cercle, chacune d'elles acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution du point (x, y) sur un contour infiniment petit tracé autour du point A.

Les conséquences tirées ci-dessus de ces principes subsisteront donc dans l'hypothèse plus générale dont nous parlons.

TROISIÈME PARTIE.

42. Appliquons maintenant la théorie qui précède à la recherche des valeurs multiples des intégrales définies. Considérons l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction entière quelconque de u et de z, et, comme au n° 5, appelons u_1 une fonction de z qui satisfasse à cette équation et se réduise à b_1, lorsque le point Z, correspondant à $z = x + y\sqrt{-1}$, part de sa position initiale C. Comme l'a remarqué M. Cauchy, la notation $\int_c^k u_1\,dz$ n'offre un sens déterminé qu'autant qu'on donne, outre les limites c et k, le chemin CMK par lequel le point mobile Z est supposé aller de C en K. A la vérité, tant que le chemin CMK, en se déformant, ne franchit aucun des points A, A', A'', etc., pour lesquels l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies, l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ conserve la même valeur, n° 9; mais s'il vient à franchir quelques-uns de ces points, l'intégrale pourra changer et acquérir un nombre limité ou illimité de valeurs différentes.

Montrons d'abord comment, à l'aide des principes établis dans la première partie, on pourra calculer avec telle approximation qu'on voudra la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ relative à un chemin donné CMK; nous supposons, bien entendu, que ce chemin ne passe par aucun des points A, A', A'', etc., sans quoi l'intégrale pourrait être indéterminée. Répétons la construction expliquée au n° 16 et par laquelle la ligne CMK est partagée en un certain nombre de parties CMC', C'M'C'', C''M''C''', etc., *fig.* 7 : le long de la ligne CMC', on a, n° 15,

$$u_1 = b_1 + F_1(b_1, c).(z-c) + F_2(b_1, c).(z-c)^2 + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente; si donc on appelle V l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long du chemin CMC', V s'exprimera par une série convergente qu'on obtiendra en intégrant chaque terme de la précédente entre les limites $z = c$, $z = c'$: on trouvera ainsi

$$V = b_1(c'-c) + F_1(b_1, c).\frac{(c'-c)^2}{2} + F_2(b_1, c).\frac{(c'-c)^3}{2} + \ldots$$

En appelant V′, V″, etc., les valeurs des intégrales $\int_{c'}^{c''} u_1 dz$, $\int_{c''}^{c'''} u_1 dz$, etc., prises respectivement le long des chemins C′M′C″, C″M″C‴, etc., on aura de même

$$V' = b'_1(c''-c') + F_1(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^2}{2} + F_2(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^3}{3} + \ldots,$$

$$V'' = b''_1(c'''-c'') + F_1(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^2}{2} + F_2(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^3}{3} + \ldots,$$

etc.

Ces quantités V, V′, V″, etc., seront en nombre limité, et en les ajoutant, on aura la valeur demandée de l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$: on pourra souvent faciliter ce calcul en profitant de la faculté qu'on a de déformer le chemin CMK, sans toutefois lui faire franchir aucun des points A, A′, A″, etc.

La même méthode peut servir à calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1 dz$ prise tout le long d'un contour élémentaire quelconque, du contour (+ A), par exemple, qui se compose de la ligne CD, *fig.* 24, du contour infiniment petit DNPD et de la ligne DC. En effet, du centre A, avec un rayon moindre d'une quantité finie que la plus petite des distances AC, AA′, AA″, AA‴, etc., décrivons une circonférence EQR qui coupe la ligne CD en E. Nous pourrons, sans changer l'intégrale, substituer au contour élémentaire (+ A) un autre contour formé de la ligne CE, de la circonférence EQRE et de la ligne EC. Comme ce dernier a tous ses points à des distances finies des points A, A′, A″, etc., rien n'empêchera de calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1 dz$ relative à ce contour par la méthode qui vient d'être exposée.

43. Soient maintenant $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Appelons A_1, A_{-1}, A'_1, A'_{-1}, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u_1 dz$ prise tout le long de chacun des contours élémentaires (+ A), (− A),

$(+ A')$, $(- A')$, etc.; appelons de même A_2, A_{-2}, A'_2, A'_{-2}, etc., les valeurs relatives à ces contours de l'intégrale $\int u_2 dz$, et ainsi de suite, de sorte que généralement $A^{(i)}_{\pm n}$ désigne la valeur de l'intégrale $\int u_n dz$ prise le long du contour élémentaire $(\pm A^{(i)})$. Ces quantités, que nous nommerons *intégrales élémentaires*, et qu'on pourra calculer comme il a été dit au numéro précédent, étant regardées comme connues, proposons-nous d'avoir l'expression de l'intégrale $\int u_1 dz$ prise à partir du point C le long d'une ligne fermée quelconque CLMC, *fig.* 4.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+ A)(- A')(+ A'')(- A)$$

la caractéristique de cette ligne : il suit du n° **10** que l'intégrale $\int u_1 dz$ restera la même, si au contour CLMC on substitue la série des contours élémentaires $(+ A)$, $(- A')$, $(+ A'')$, $(- A)$. D'un autre côté, les fonctions u_1, u_2,..., u_m étant partagées relativement aux différents points A, A', A'', etc., en systèmes circulaires, on saura quelle est la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour $(+ A)$; supposons que ce soit u_3 : on saura de même qu'après une révolution de Z sur $(- A')$, u_3 acquiert la valeur initiale de u_4, par exemple : enfin, admettons que u_4 acquière la valeur initiale de u_2 après une révolution de Z sur $(+ A'')$. Cela posé, la partie relative au contour $(+ A)$ de l'intégrale demandée sera A_1; la partie relative au contour $(- A')$ sera A'_{-3}, et les parties relatives aux contours $(+ A'')$ et $(- A)$ seront respectivement A''_4 et A_{-2}. L'intégrale $\int u_1 dz$ prise le long de la ligne fermée CLMC sera donc

$$A_1 + A'_{-3} + A''_4 + A_{-2}.$$

En général, on voit que la valeur de cette intégrale, prise le long d'un contour fermé passant par le point C, s'exprimera toujours par la somme d'un certain nombre des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, A'_1,..., A_2, etc.

44. Cette première question résolue, cherchons à présent les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ pour les divers chemins par lesquels on peut aller de C en K. Soit CMK, *fig.* 17, un premier chemin tracé à volonté entre ces deux points : appelons $v_1, v_2,\ldots, v_m$ les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz,\ldots,$ $\int_c^k u_m\,dz$ prises le long de cette ligne, et proposons-nous de trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ relativement à un autre chemin quelconque CLK.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+\,A)(-\,A')(+\,A'')(-\,A) + \text{CMK}$$

la caractéristique de ce chemin : conservons les hypothèses du numéro précédent, et supposons de plus qu'après une révolution de Z sur $(-\,A)$, u_2 acquière, par exemple, la valeur initiale de u_3. On pourra, n° **9**, substituer à la ligne CLK la série des chemins représentés par les différents termes de la caractéristique : alors on trouvera immédiatement pour l'intégrale demandée l'expression

$$A_1 + A'_{-3} + A''_4 + A_{-2} + v_3.$$

On voit par là que les valeurs autres que v_1 de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ s'obtiendront en ajoutant à l'une des quantités $v_1, v_2,\ldots, v_m$ une ou plusieurs des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, $A'_1,\ldots$, A_2, etc., la même intégrale élémentaire pouvant être répétée plusieurs fois dans cette somme. Observons toutefois qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ en ajoutant à une des quantités $v_1, v_2,\ldots,$ v_m les produits d'un certain nombre des quantités A_1, A_{-1}, $A'_1,\ldots,$ A_2, etc., par des nombres entiers pris au hasard.

45. Les intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, etc., jouissent de quelques propriétés qu'il est bon de remarquer. Soit u_j la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(+\,A)$; réciproquement, u_j acquerra la valeur initiale de

u_i après une révolution de Z sur le contour (— A). Les intégrales désignées par A_i et A_{-j} ont donc leurs éléments deux à deux égaux et de signes contraires, et, par conséquent, on a

$$A_{-j} = - A_i;$$

ainsi chacune des intégrales $A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-m}$, relatives au contour (— A), est égale et de signe contraire à quelqu'une des intégrales A_1, $A_2, \ldots, A_m$, relatives au contour (+ A), et *vice versâ*.

46. Supposons en particulier que la fonction u_i reprenne sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour (+ A); il en sera de même sur le contour (— A), et l'équation précédente deviendra

$$A_{-i} = - A_i.$$

Dans ce cas, il suit du n° **11** que la quantité A_i est indépendante de la position initiale C du point mobile Z, c'est-à-dire qu'elle reste la même si l'on déplace le point C, et qu'en même temps le contour élémentaire (A) se déforme sans franchir aucun des points A, A', A", etc. On peut donc regarder A_i comme la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long d'un contour infiniment petit tracé autour du point A, par où l'on voit que si la fonction u_i conserve une valeur finie au point A, l'intégrale A_i se réduit à zéro.

En effet, prenons pour le contour infiniment petit dont il vient d'être question, une circonférence décrite du point A comme centre avec le rayon très-petit ρ. Pour un point de cette circonférence, on aura

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

τ désignant un angle réel; d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par suite,

$$A_i = \sqrt{-1}\,\rho \int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau.$$

Mais u_i conservant une valeur finie pour de très-petites valeurs de ρ, il en est de même de l'intégrale $\int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau$: l'expression de A_i

se réduit donc à zéro en même temps que ρ; et comme l'intégrale A_i est indépendante de ρ, on en conclut

$$A_i = 0.$$

47. Il y a un cas remarquable dans lequel on peut trouver entre les intégrales élémentaires des relations dont nous tirerons parti dans la suite. C'est celui où, après une révolution de Z sur un contour Δ passant par le point C et renfermant tous les points A, A', A'', etc., dans son intérieur, quelques-unes des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ reprennent leurs valeurs initiales.

Soit u_i une des fonctions qui remplissent cette condition : la caractéristique (Δ) du contour Δ parcouru dans le sens direct se composera des termes $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc., rangés dans un certain ordre, chacun de ces termes s'y trouvant une fois et pas davantage. Il est permis de supposer les points A, A', A'', etc., nommés dans un ordre tel, qu'on ait précisément

$$(\Delta) = (+A)(+A')(+A'')\ldots;$$

admettons ensuite qu'après que Z a parcouru les lignes fermés qui ont pour caractéristiques $(+A)$, $(+A)$, $(+A')$, $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc., la fonction u_i ait acquis respectivement les valeurs initiales de $u_{i'}$, $u_{i''}$, $u_{i'''}$, etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i\,dz$, prise le long du contour Δ, sera

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots.$$

De l'origine O des coordonnées, décrivons maintenant une circonférence Θ, dont le rayon R soit plus grand que la plus grande des distances OA, OA', OA'', etc. Il est clair qu'on peut déformer le contour Δ de manière à le faire coïncider avec cette circonférence sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i\,dz$, prise le long de la circonférence Θ, est donc encore égale à la somme

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots.$$

Mais nous pouvons en trouver une autre expression : en effet, po-

sons $z = \frac{1}{z'}$, z' désignant une nouvelle variable, et concevons un point mobile Z′ dont les coordonnées, rapportées à deux nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans z'. Les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_m$, deviendront alors des fonctions de z', qui satisferont à l'équation algébrique

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0;$$

et comme au delà de la circonférence Θ il n'y a pas, à une distance finie de l'origine O, de position du point Z pour laquelle l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ait des racines égales ou infinies, de même en dedans du cercle Θ', dont le centre est O′ et dont le rayon est $\frac{1}{R}$, il n'y aura pas de position du point Z′ autre que l'origine O′, pour laquelle l'équation

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

ait des racines égales ou infinies. D'ailleurs la fonction u_i reprend, par hypothèse, sa valeur initiale après une révolution de Z sur la circonférence Θ; par conséquent, elle reprendra aussi sa valeur initiale après une révolution de Z′ sur la circonférence Θ'. Le système circulaire dont u_i fait partie relativement au point O′, ne se compose donc que du seul terme u_i, et, par suite, dans l'intérieur du cercle Θ', cette fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de z', cette série pouvant commencer par un nombre limité de puissances négatives, n° 38. On aura donc, pour un module de z' égal ou inférieur à $\frac{1}{R}$,

$$u_i = \alpha_i z'^{-f} + \beta_i z'^{-f+1} + \ldots + x_i + \lambda_i z' + \mu_i z'^2 + \ldots,$$

f désignant un nombre entier et positif, et $\alpha_i, \beta_i, \ldots, x_i, \lambda_i, \mu_i$, etc., des coefficients indépendants de z' : on en conclut que, pour un module de z égal ou supérieur à R, on a

$$u_i = \alpha_i z^f + \beta_i z^{f-1} + \ldots + x_i + \frac{\lambda_i}{z} + \frac{\mu_i}{z^2} + \ldots.$$

Si maintenant on veut avoir l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long du cercle Θ, il suffit de faire

$$z = \mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par conséquent,

$$\int u_i dz = \sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} \alpha_i \mathrm{R}^{f-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(f+1)\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + \beta_i \mathrm{R}^f \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{f\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \\ + \varkappa_i \mathrm{R}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \lambda_i \displaystyle\int_0^{2\pi} d\tau \\ + \dfrac{\mu_i}{\mathrm{R}}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\} = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1}.$$

Nous avons donc l'équation

$$\mathrm{A}_i + \mathrm{A}'_{i'} + \mathrm{A}''_{i''} + \mathrm{A}'''_{i'''} + \ldots = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1},$$

où λ_i désigne le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de u_i suivant les puissances descendantes de z, et nous aurons une équation semblable pour chaque fonction u_i qui reprend sa valeur initiale apres une révolution de Z sur le contour fermé Δ qui renferme dans son intérieur tous les points A, A′, A″, etc.

18. Nous avons dit plus haut, n° **14**, qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de $\int_c^k u_i\,dz$ en ajoutant à une des quantités v_1, $v_2, \ldots, v_m$ des multiples entiers pris au hasard des intégrales élémentaires. Mais il existe certains groupes de ces intégrales qui jouissent d'une propriété remarquable : c'est que la somme des intégrales élémentaires composant un de ces groupes, somme qui est indépendante de c, peut être ajoutée ou retranchée autant de fois qu'on voudra à une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_i\,dz$, sans qu'on cesse d'avoir une valeur de la même intégrale.

En effet, soit w la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long du chemin $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$, en désignant par (Γ) la caractéristique d'un contour fermé passant par le point C. Séparons d'une maniere quelconque les termes de (Γ) en deux groupes (Γ') et (Γ'') [l'un de ces groupes pouvant être (0)], de sorte que la caractéristique $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$ puisse se mettre sous la forme $(\Gamma')(\Gamma'') + \mathrm{CMK}$. Soit maintenant u_n la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour fermé (Γ'); on pourra tracer de plusieurs manières un contour fermé passant par le point C tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Appelons (Φ) et $(-\Phi)$ les caractéristiques d'un pareil contour, selon qu'il est supposé parcouru dans un sens ou dans le sens contraire. Soit, de plus, p la valeur de l'intégrale $\int u_n dz$ prise le long du contour (Φ); cette quantité p pourra s'exprimer, n° **43**, par la somme d'un certain nombre d'intégrales élémentaires, et il suit du n° **12** qu'elle est indépendante de la position du point C.

Cela posé, il est clair que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long des chemins

$$\begin{array}{l}(\Gamma')(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\ (\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\ (\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\quad \text{etc.},\\ (\Gamma')(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\\ (\Gamma')(-\Phi)(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK},\quad \text{etc.},\end{array}$$

aura respectivement pour valeurs

$$\begin{array}{llll} p + w, & 2p + w, & 3p + w, & \text{etc.},\\ -p + w, & -2p + w, & \text{etc.} & \end{array}$$

On voit donc que si à la valeur w de $\int_c^k u_1\,dz$ on ajoute un multiple entier quelcouque de p, on aura encore une valeur de la même intégrale : nous dirons pour cette raison que p est une *période* de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$.

Voici maintenant quelques-unes des questious qui se présentent :

1°. Trouver toutes les périodes *distinctes* qui appartiennent à une valeur de $\int_c^k u_1\,dz$: nous entendons que des périodes sont distinctes, quand aucune ne peut s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres; ainsi $2p$ ne sera pas une période distincte de p, ni $p+q$ une période distincte de p et de q.

2°. Reconnaître si chaque période p appartient à toutes les valeurs de l'intégale $\int_c^k u_1\,dz$ ou seulement à une partie d'entre elles.

3°. Déterminer les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ qui restent distinctes lorsqu'on fait abstraction des multiples entiers des périodes.

La solution de ces questions dans plusieurs cas étendus fait l'objet de la suite de ce Mémoire.

49. Le cas le plus simple est celui où la fonction u est rationnelle; alors l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du premier degré, et, par conséquent, ne peut avoir de racines égales; mais la valeur de u peut devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de z. Soient a, a', a'', etc., ces valeurs, et A, A', A'', etc., les points correspondants; il sera toujours possible de mettre u sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{z-a} + \frac{E_1}{(z-a)^2} + \frac{E_2}{(z-a)^3} + \ldots + \frac{E_{m-1}}{(z-a)^m} \\
&+ \frac{E'}{z-a'} + \frac{E'_1}{(z-a')^2} + \ldots + \frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}} \\
&+ \frac{E''}{z-a''} + \frac{E''_1}{(z-a'')^2} + \ldots + \frac{E''_{m''-1}}{(z-a'')^{m''}} + \ldots + \varpi(z),
\end{aligned}$$

E, E_1, E_2,..., E'_1, E'_2, etc., désignant des constantes, et $\varpi(z)$ une fonction entière de z.

Les intégrales élémentaires relatives aux contours (+ A), (− A), (+ A'), (− A'), (+ A''), (− A''), etc., seront ici indépendantes de la

position du point C, et auront respectivement pour valeurs

$$+2\pi E\sqrt{-1},\quad -2\pi E\sqrt{-1},\quad +2\pi E'\sqrt{-1},$$
$$-2\pi E'\sqrt{-1},\quad +2\pi E''\sqrt{-1},\quad -2\pi E''\sqrt{-1},\ldots$$

Si donc on appelle v la valeur de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ relative à un chemin déterminé CMK, toutes les valeurs de cette intégrale seront données par la formule

$$v + 2\pi\sqrt{-1}\,(nE + n'E' + n''E'' + \ldots),$$

n, n', n'', etc., désignant des nombres entiers quelconques positifs, négatifs ou nuls.

Les périodes $2\pi E\sqrt{-1}$, $2\pi E'\sqrt{-1}$, $2\pi E''\sqrt{-1}$, etc., seront généralement distinctes et en même nombre que les valeurs de z qui rendent la fonction u infinie; mais il n'en serait plus de même si un ou plusieurs des nombres E, E', E'', etc., pouvaient s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres. D'ailleurs les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ seront toujours en nombre infini, à moins que les nombres E, E', E'', etc., ne soient tous nuls, auquel cas l'intégrale n'aurait que la valeur v.

Ce qu'on vient de dire de la fonction rationnelle u s'appliquerait également à toute fonction transcendante susceptible d'être mise sous la forme

$$\frac{E}{z-a} + \frac{E_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{E_{m-1}}{(z-a)^m} + \frac{E'}{z-a'} + \ldots + \frac{E'_{m-1}}{(z-a')^{m'}} + \ldots + \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction qui n'a qu'une seule valeur et qui reste finie et continue pour toute valeur finie de z. Les constantes E, E', etc., sont ce que M. Cauchy appelle les résidus de la fonction u relatifs aux valeurs a, a', etc., de z, et les périodes qu'on trouve dans ce cas pour l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ sont bien celles qui ont été indiquées par cet illustre géomètre. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1846.)

Cherchons en particulier les périodes de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$: les quantités E, E', etc., sont ici au nombre de deux et ont pour valeurs $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, d'où résultent, pour l'intégrale, les deux périodes $+\pi$ et $-\pi$; comme elles sont égales et de signes contraires, ces deux périodes se réduisent à une seule $+\pi$. On sait, en effet, que les valeurs de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$ sont les différents arcs qui ont k pour tangente, et que ces arcs sont tous compris dans la formule $v + n\pi$, v désignant l'un d'entre eux.

50. Lorsque l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du second degré en u, les deux valeurs de u peuvent être mises sous la forme

$$u = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} \pm \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}} \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}},$$

P, Q, R, S, T, U désignant des polynômes entiers. Supposons, ce qui est permis, que T et U n'aient pas de facteurs multiples, que R soit premier avec S et U, que T le soit aussi, et, enfin, que P et Q soient premiers entre eux; les valeurs de z qui annuleront un des polynômes Q, R, S, T, U, seront celles qui feront acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales ou infinies.

Appelons A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent T ou U, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent un des polynômes Q, R, S, sans annuler T ni U. Désignons par $(\pm \mathrm{A})$, $(\pm \mathrm{A}')$, etc., les contours élémentaires qui renferment les points A, A', etc., et par $(\pm \mathcal{A})$, $(\pm \mathcal{A}')$, etc., ceux qui renferment les points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. Enfin, nommons $\mathrm{A}_{\pm 1}$, $\mathrm{A}_{\pm 2}$, $\mathrm{A}'_{\pm 1}$, $\mathrm{A}'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours $(\pm \mathrm{A})$, $(\pm \mathrm{A}')$, etc., et $\mathcal{A}_{\pm 1}$, $\mathcal{A}_{\pm 2}$, $\mathcal{A}'_{\pm 1}$, $\mathcal{A}'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours $(\pm \mathcal{A})$ $(\pm \mathcal{A}')$, etc.

On voit sans peine que, relativement à chacun des points A, A',

A″, etc., les deux fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire; si donc $A^{(i)}$ désigne un quelconque de ces points, on aura, n° 45,

$$A^{(i)}_{-1} = -A^{(i)}_{2}, \quad A^{(i)}_{-2} = -A^{(i)}_{1}.$$

Mais si l'on appelle $\mathcal{A}^{(i)}$ un des points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc., comme, après une révolution de Z sur un contour infiniment petit tracé autour de $\mathcal{A}^{(i)}$, chacune des fonctions u_1, u_2 reprend sa propre valeur initiale, on aura, n° 46,

$$\mathcal{A}^{(i)}_{-1} = -\mathcal{A}^{(i)}_{1}, \quad \mathcal{A}^{(i)}_{-2} = -\mathcal{A}^{(i)}_{2}.$$

En regardant ces intégrales élémentaires comme connues, ainsi que les valeurs v_1, v_2 des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé CMK, nous saurons trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un autre chemin quelconque CLK, dont la caractéristique sera donnée. Proposons-nous maintenant de former des expressions générales qui comprennent les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ relatives à tous les chemins CLK par lesquels on peut aller de C en K.

Appelons (Λ) la caractéristique du chemin CLK; soit $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$ un terme de cette caractéristique et n le nombre des termes qui le précèdent. Lorsque le point Z aura parcouru les contours élémentaires représentés par les n premiers termes de (Λ), la fonction u_1 aura repris sa valeur initiale, ou bien aura acquis la valeur initiale de u_2. Dans le premier cas, la portion de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, qui est prise le long du contour élémentaire $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$, sera $\mathcal{A}^{(i)}_{\pm 1}$; dans le second cas, cette portion sera $\mathcal{A}^{(i)}_{\pm 2}$. D'ailleurs la fonction u_1 reprendra, après que Z aura parcouru ce $n+1^{\text{ième}}$ contour élémentaire, la valeur qu'elle avait après les n premiers. On peut donc supprimer, dans la caractéristique (Λ), tous les termes de la forme $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$, et se borner à calculer la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ pour le chemin représenté par la caractéristique ainsi simplifiée, pourvu qu'on ajoute à cette valeur une quantité de la

forme

$$F = l_1 A_1 + l'_1 A'_1 + l''_1 A''_1 + \dots \\ + l_{-1} A_{-1} + l'_{-1} A'_{-1} + l''_{-1} A''_{-1} + \dots \\ + l_2 A_2 + l'_2 A'_2 + \dots + l_{-2} A_{-2} + l'_{-2} A'_{-2} + \dots;$$

$l_1, l'_1, l''_1, \dots, l_{-1}, l'_{-1}, \dots, l_2, l'_2$, etc., désignant des nombres entiers positifs, nuls, et même, si l'on veut, négatifs, puisqu'on a

$$l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_{-1} = - l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_1, \quad l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_{-2} = - l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_2.$$

Il est clair d'ailleurs qu'en disposant convenablement du chemin CLK, on fera acquérir à ces nombres telles valeurs entières qu'on voudra; il suffira, pour cela, d'introduire dans la caractéristique (A) des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$.

Cette caractéristique étant débarrassée des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$, n'en contiendra plus que de la forme $[\pm \mathrm{A}^{(i)}]$, outre le dernier qui est + CMK. Soit

$$(\mathrm{A}') = [\pm \mathrm{A}^{(e)}][\pm \mathrm{A}^{(f)}][\pm \mathrm{A}^{(g)}][\pm \mathrm{A}^{(h)}] \dots [\pm \mathrm{A}^{(i)}] + \mathrm{CMK}$$

la caractéristique ainsi modifiée : à mesure que Z achèvera de décrire chacun des contours élémentaires qui la composent, il arrivera alternativement ou que la fonction u_1 acquerra la valeur initiale de u_2, ou qu'elle reprendra sa propre valeur initiale. Si donc le nombre des contours élémentaires qui entrent dans (A') est pair, la valeur de $\int_c^k u_1\, dz$, prise le long du chemin (A'), sera

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \dots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 2} + v_1,$$

et si le nombre dont on vient de parler est impair, la valeur de l'intégrale sera

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \dots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 1} + v_2.$$

Appelons B, $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{B}_{,,}$, $\mathrm{B}_{,,,}$, etc., tous les résultats qu'on obtient en ajoutant une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 2}$, $\mathrm{A}'_{\pm 2}$, $\mathrm{A}''_{\pm 2}$, etc., à l'une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 1}$, $\mathrm{A}'_{\pm 1}$, $\mathrm{A}''_{\pm 1}$, etc.; chacune des expressions V_1, V_2 sera, sauf son dernier ou ses deux derniers termes, la somme d'un certain nombre des

quantités $B, B_{\prime}, B_{\prime\prime}, B_{\prime\prime\prime}$, etc., la même pouvant être répétée plusieurs fois. Ainsi on aura

$$V_1 = mB + m_{\prime} B_{\prime} + m_{\prime\prime} B_{\prime\prime} + \ldots + v_1,$$
$$V_2 = mB + m_{\prime} B_{\prime} + m_{\prime\prime} B_{\prime\prime} + \ldots + A^{(i)}_{\pm 1} + v_2,$$

$m, m_{\prime}, m_{\prime\prime}$, etc., désignant des nombres entiers quelconques, lesquels peuvent être positifs, nuls, ou même négatifs, puisque les quantités $B, B_{\prime}, B_{\prime\prime}$ sont deux à deux égales et de signes contraires. Observons qu'on a

$$A_1 + A_{-2} = 0,$$

et, par conséquent,

$$A^{(i)}_{\pm 1} = A^{(i)}_{\pm 1} + A_{-2} + A_1,$$

où la somme $A^{(i)}_{\pm 1} + A_{-2}$ est une des quantités $B, B_{\prime}, B_{\prime\prime}$, etc. : l'intégrale désignée par V_2 peut donc aussi se mettre sous la forme

$$V_2 = mB + m_{\prime} B_{\prime} + m_{\prime\prime} B_{\prime\prime} + \ldots + A_1 + v_2.$$

Pour avoir maintenant la valeur de $\int_c^k u_1\, dz$ relativement à un chemin quelconque CLK, il suffira d'ajouter la quantité F à l'une des quantités V_1, V_2. Il en résulte que toutes les valeurs de l'intégrale définie $\int_c^k u_1\, dz$ sont comprises dans les deux formules

$$G + v_1, \quad G + A_1 + v_2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} G = {} & l_1 A_1 + l'_1 A'_1 + l''_1 A''_1 + \ldots + l_{-1} A_{-1} + l'_{-1} A'_{-1} + l''_{-1} A''_{-1} + \ldots \\ & + l_2 A_2 + l'_2 A'_2 + \ldots + l_{-2} A_{-2} + l'_{-2} A'_{-2} + \ldots \\ & + mB + m_{\prime} B_{\prime} + m_{\prime\prime} B_{\prime\prime} + \ldots, \end{aligned}$$

les lettres $l_1, l'_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, \ldots, l_{-2}, \ldots, m, m_{\prime}, m_{\prime\prime}$, etc., désignant, comme on l'a déjà dit, des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs et absolument quelconques. En d'autres termes, toutes les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant aux deux

valeurs v_1 et $A_1 + v_2$ des multiples entiers quelconques des quantités

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}_1,\ \ \mathcal{A}'_1,\ \ \mathcal{A}''_1,\ldots,\ \ \mathcal{A}_{-1},\ \ \mathcal{A}'_{-1},\ \ \mathcal{A}''_{-1},\ldots \\ \mathcal{A}_2,\ \ \mathcal{A}'_2,\ldots,\ \ \mathcal{A}_{-2},\ \ \mathcal{A}'_{-2},\ldots, \\ \mathrm{B},\ \ \mathrm{B}_{\prime},\ \ \mathrm{B}_{\prime\prime},\ \ \text{etc.} \end{array}$$

Ces quantités sont donc autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, et toute autre période de la même intégrale est nécessairement composée de celles-là; mais elles ne sont pas toutes distinctes, et, en ayant égard aux équations établies ci-dessus,

$$\mathcal{A}_{-1}^{(i)} = -\mathcal{A}_1^{(i)},\quad \mathcal{A}_{-2}^{(i)} = -\mathcal{A}_2^{(i)},\quad \mathrm{A}_{-1}^{(i)} = -\mathrm{A}_2^{(i)},\quad \mathrm{A}_{-2}^{(i)} = -\mathrm{A}_1^{(i)},$$

on reconnaîtra sans peine qu'elles peuvent être réduites aux suivantes :

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}_1,\ \ \mathcal{A}'_1,\ \ \mathcal{A}''_1,\ldots,\ \ \mathcal{A}_2,\ \ \mathcal{A}'_2,\ \ \mathcal{A}''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2,\ \ \mathrm{A}_1+\mathrm{A}'_2,\ \ \mathrm{A}_1+\mathrm{A}''_2,\ \ \mathrm{A}_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_2+\mathrm{A}'_1,\ \ \mathrm{A}_2+\mathrm{A}''_1,\ \ \mathrm{A}_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}'_2,\ \ \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}''_2,\ \ \mathrm{A}'_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}'_2+\mathrm{A}''_1,\ \ \mathrm{A}'_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}''_1+\mathrm{A}''_2,\ \ \mathrm{A}''_1+\mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}''_2+\mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \quad\text{etc.} \end{array}$$

Ces dernières périodes seront distinctes en général; mais, dans des cas particuliers, elles pourront se réduire à un nombre beaucoup moindre.

Il suit de la remarque faite au n° **46**, qu'une période telle que $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ est indépendante des limites c et k et peut être regardée comme la valeur de l'intégrale $\int u_1 dz$ ou $\int u_2 dz$ prise tout le long d'un contour fermé infiniment petit qui renferme le point $\mathcal{A}$. Une période telle que $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1 + u_2) dz$ prise tout le long du contour élémentaire $(+\mathrm{A})$; mais, comme la fonction $u_1 + u_2$ reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur ce contour, l'intégrale dont il s'agit est indépendante de la position

du point C, n° 11, et peut être considérée comme prise tout le long d'un contour infiniment petit qui entoure le point A. Enfin, une période telle que $A_1 + A'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise le long du contour fermé qui a pour caractéristique $(+A)(+A')$; comme après une révolution de Z sur ce contour la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, l'intégrale ou, ce qui est la même chose, la période $A_1 + A'_2$ sera indépendante de la position du point C et pourra être considérée comme prise tout le long d'un contour fermé assujetti seulement à renfermer les points A et A', avec cette condition toutefois qu'il puisse se réduire au contour $(+A)(+A')$ sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., *A*, *A'*, *A''*, etc. On voit donc que toutes les périodes dont le tableau a été donné ci-dessus seront bien indépendantes des limites c et k de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$.

Nous venons de dire que la période $A_1 + A'_2$ était égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise le long d'un contour fermé qui entoure les deux points A et A'. Soit ADHD'A', *fig.* 25, une ligne tracée entre ces points et avec laquelle le contour dont il s'agit puisse se confondre sensiblement sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., de sorte que ce contour puisse être regardé comme formé de la ligne DHD', du contour fermé infiniment petit D'E'F'D', de la ligne D'HD, et enfin du contour infiniment petit DEFD. On voit aisément qu'il y a un cas fort étendu où les portions de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relatives aux contours infiniment petits DEFD, D'E'F'D' tendent vers zéro, à mesure que les dimensions de ces contours diminuent elles-mêmes jusqu'à zéro; ce cas est celui où la limite du produit $(z-a)u_1$, pour $z=a$, et la limite du produit $(z-a')u_1$, pour $z=a'$, sont nulles l'une et l'autre. En effet, pour des valeurs très-petites du module de $z-a$, la fonction u_1 est développable suivant les puissances entières négatives et positives de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$: si donc le produit $(z-a)u_1$ se réduit à zéro pour $z=a$, le développement de u_1 doit être de la forme

$$u_1 = A(z-a)^{-\frac{1}{2}} + B + C(z-a)^{\frac{1}{2}} + D(z-a) + E(z-a)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Mais il est permis de prendre pour le contour DEFD une circonférence décrite du point A comme centre avec un rayon très-petit ρ et de faire sur cette circonférence

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau :$$

il s'ensuit que la partie de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relative au contour DEFD est égale à

$$\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\rho^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + \mathrm{B}\rho\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + \mathrm{C}\rho^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\}$$

$$= -4\left(\mathrm{A}\rho^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}\mathrm{C}\rho^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}\mathrm{E}\rho^{\frac{5}{2}} + \ldots\right),$$

et l'on voit qu'elle s'annule en même temps que ρ, comme nous l'avions annoncé. On prouvera de même que la portion d'intégrale relative au contour D'E'F'D' se réduit à zéro en même temps que les dimensions de ce contour. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, la période $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2$ est la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux deux chemins DHD' et D'HD, quand les points D et D' tendent respectivement vers A et A' : mais lorsque le point Z, après avoir parcouru le chemin DHD', revient suivre le chemin D'HD, en faisant le tour du point A', la fonction u_1 ne reprend pas les valeurs par lesquelles elle était passée d'abord, mais acquiert les valeurs qu'aurait eues dans un ordre inverse la fonction u_2, en partant du point D. La somme des portions d'intégrale relatives aux chemins DHD' et D'HD est donc la même chose que l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne DHD', et en passant à la limite, on en conclut que la période $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne AHA'.

Ajoutons que, dans le cas que nous venons de considérer, la somme $A_1 + A_2$ se réduit à zéro; car elle exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise le long du contour DEFD; or on a, en prenant pour ce contour la circonférence du rayon ρ,

$$u_1 + u_2 = 2B + 2D(z-a) + 2F(z-a)^2 + \ldots,$$

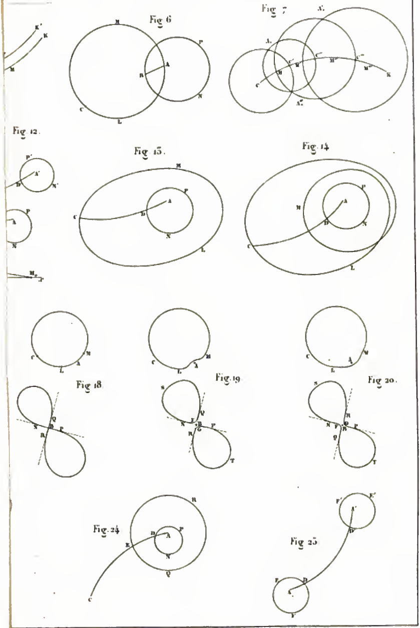
et, par conséquent,

$$\int (u_1 + u_2)\,dz = 2\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} B\rho \int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + D\rho^2 \int_0^{2\pi} e^{2\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + F\rho^3 \int_0^{2\pi} e^{3\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

On voit, de la même manière, que la somme $A'_1 + A'_2$ est aussi nulle; ainsi les périodes $A_1 + A_2$, $A'_1 + A'_2$, disparaissent, tandis que les périodes $A_1 + A'_2$, $A_2 + A'_1$, étant égales et de signes contraires, n'en font plus qu'une seule distincte.

Lorsque le nombre des points A, A', A", etc., sera un nombre pair $2n$, on pourra appliquer la remarque du n° **47**. Dans ce cas, en effet, chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale apres une révolution du point Z sur le contour Δ qui, passant par le point C, enveloppe tous les points A, A', A", etc., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc. La caractéristique (Δ) de ce contour contiendra deux sortes de termes qui pourront s'y trouver entremêlés, les uns de la forme $[+ A^{(i)}]$, les autres de la forme $[+ \mathcal{A}^{(i)}]$. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$...., $[+A^{(2n-2)}]$, $[+A^{(2n-1)}]$, s'y trouvent dans l'ordre où nous venons de les écrire, sauf les termes de la forme $[+\mathcal{A}^{(i)}]$ qui peuvent se trouver entre eux. Appelons $[+\mathcal{A}^{(\mu)}]$, $[+\mathcal{A}^{(\mu')}]$, $[+\mathcal{A}^{(\mu'')}]$, etc., ceux de ces derniers qui, dans la caractéristique (Δ), ont avant eux un nombre pair de termes de la forme $[+A^{(i)}]$, et $[+\mathcal{A}^{(\nu)}]$, $[+\mathcal{A}^{(\nu')}]$, $[+\mathcal{A}^{(\nu'')}]$, etc., ceux qui ont avant eux un nombre impair de termes de la forme $[+A^{(i)}]$. L'équation du n° **47**, appliquée successivement aux deux fonctions u_1 et u_2, nous

…: par M. V. Puiseux.



Gravé par E. Wormser

donnera

$$\mathcal{A}_1^{(\mu)} + \mathcal{A}_1^{(\mu')} + \mathcal{A}_1^{(\mu'')} + \ldots + \mathcal{A}_2^{(\nu)} + \mathcal{A}_2^{(\nu')} + \mathcal{A}_2^{(\nu'')} + \ldots$$
$$+ A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 + \ldots + A_1^{(2n-2)} + A_2^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_1\sqrt{-1},$$
$$\mathcal{A}_2^{(\mu)} + \mathcal{A}_2^{(\mu')} + \mathcal{A}_2^{(\mu'')} + \ldots + \mathcal{A}_1^{(\nu)} + \mathcal{A}_1^{(\nu')} + \mathcal{A}_1^{(\nu'')} + \ldots$$
$$+ A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 + \ldots + A_2^{(2n-2)} + A_1^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_2\sqrt{-1},$$

λ_1 et λ_2 désignant les coefficients de $\frac{1}{z}$ dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z.

Le premier membre de chacune de ces équations est la somme d'une partie des périodes contenues dans le tableau ci-dessus · lorsque λ_1 et λ_2 seront nuls, on tirera de là les valeurs de deux de ces périodes exprimées chacune par la somme [illegible] signe contraire de plusieurs autres, ce qui permettra de réduire de deux unités le nombre des périodes distinctes.

51. Faisons maintenant quelques applications de ce qui vient d'être dit dans le numéro précédent, et, d'abord, supposons que l'équation entre u et z soit

$$(z - a)u^2 = h^2,$$

h désignant une constante. Appelons A le point qui répond à $z = a$, et autour duquel les fonctions u_1, u_2 forment un système circulaire : l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'aura qu'une seule période $A_1 + A_2$, qui exprime l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise sur le contour élémentaire $(+A)$. Mais, dans l'exemple dont il s'agit, on a

$$u_1 + u_2 = 0;$$

il en résulte

$$A_1 + A_2 = 0.$$

La période est donc nulle, et l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'a que les deux valeurs v_1 et $A_1 + v_2$.

On arriverait à la même conclusion en considérant l'équation

$$u^2 = h^2(z-a).$$

52. Prenons ensuite l'équation

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2 :$$

appelons A et A' les points correspondants à $z=a$ et à $z=a'$; relativement à chacun d'eux, les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire. Les expressions générales des périodes données au n° **50** se réduisent ici aux quatre quantités

$$A_1 + A_2, \quad A_1 + A'_2, \quad A_2 + A'_1, \quad A'_1 + A'_2;$$

mais, de la relation $u_1 + u_2 = 0$, on conclut

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0,$$

et, par suite,

$$A_2 + A'_1 = -(A_1 + A'_2).$$

Ainsi les quatre périodes se ramènent à une seule distincte $A_1 + A'_2$; comme le produit $(z-a)u_1$ se réduit à zéro pour $z=a$, et qu'il en est de même du produit $(z-a')u_1$ pour $z=a'$, il suit d'une remarque faite au n° **50**, qu'on peut regarder la période $A_1 + A'_2$ comme exprimant la valeur de l'intégrale

$$\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz = 2\int_a^{a'} u_1\,dz = 2h\int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}},$$

prise le long de la droite AA'. Pour en trouver la valeur, posons

$$z = \frac{a+a'}{2} + \frac{a-a'}{2}z',$$

z' étant une nouvelle variable à laquelle on peut faire correspondre un point mobile Z'. Les limites de z étant a et a', celles de z' seront -1 et $+1$, et lorsque le point Z décrira la droite AA', le point Z' décrira la portion de l'axe des x comprise entre les deux points qui répondent à $z'=-1$, $z'=+1$. On aura donc

$$2h\int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}} = 2h\int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2-1}} = \frac{2h}{\sqrt{-1}}\int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}},$$

en supposant que z' passe de la valeur -1 à la valeur $+1$ par une suite de valeurs réelles et croissantes; mais, sous cette condition, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}} = \pi;$$

par conséquent la période unique de l'intégrale $\int_c^z u_1\, dz$ est $\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}}$, ou, si l'on veut, $-\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}} = 2\pi h\sqrt{-1}$, car il importe peu qu'on change le signe d'une période.

On peut l'obtenir autrement en observant que les points A, A' sont ici en nombre pair, et qu'ainsi on peut appliquer la remarque qui termine le n° 50. Les coefficients de $\frac{1}{z}$, dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z, sont $\pm h$ et $\mp h$; les deux équations établies à l'endroit qu'on vient de citer deviennent donc

$$A_1 + A'_2 = \pm 2\pi h\sqrt{-1}, \quad A_2 + A'_1 = \mp 2\pi h\sqrt{-1};$$

on retrouve bien, pour la période $A_1 + A'_2$, la même valeur $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$.

Faisons, en particulier,

$$a = +1, \quad a' = -1, \quad h = +\sqrt{-1},$$

de sorte qu'on ait

$$u^2 = \frac{1}{1-z^2},$$

et posons

$$\int_0^z u_1\, dz = v,$$

u_1 désignant celle des valeurs de u dont la valeur initiale est $+1$ pour $z=0$. Les diverses valeurs de v sont les arcs en nombre infini qui ont z pour sinus; en d'autres termes, on a

$$z = \sin v;$$

la période $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$ se réduit ici à 2π, ce qui s'accorde bien avec

l'équation connue

$$\sin(v + 2l\pi) = \sin v,$$

où l désigne un nombre entier quelconque.

Si au lieu de l'équation

$$(z-a)(z-a')u^2 = h^2,$$

on eût considéré celle-ci :

$$u^2 = h^2(z-a)(z-a'),$$

on eût trouvé de la même manière, pour la période unique de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, l'expression

$$\frac{\pi h(a'-a)^2}{4}\sqrt{-1}.$$

5. Passons à l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')u^2 = h^2 :$$

la méthode générale fournira pour les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ les neuf quantités

$$\begin{array}{lllll} A_1 + A_2, & A_1 + A'_2, & A_1 + A''_2, & A_2 + A'_1, & A_2 + A''_1, \\ A'_1 + A'_2, & A'_1 + A''_2, & A'_2 + A''_1, & A''_1 + A''_2. & \end{array}$$

Mais, à cause de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on a

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0;$$

il en résulte

$$\begin{array}{lll} A_1 + A'_2 = A_1 - A'_1, & A_1 + A''_2 = -(A''_1 - A_1), & A_2 + A'_1 = -(A_1 - A'_1), \\ A_2 + A''_1 = A''_1 - A_1, & A'_1 + A''_2 = A'_1 - A''_1, & A'_2 + A''_1 = -(A'_1 - A''_1), \end{array}$$

ce qui réduit les périodes précédentes aux trois suivantes :

$$A_1 - A'_1, \quad A'_1 - A''_1, \quad A''_1 - A_1,$$

et celles-ci à leur tour, ayant zéro pour somme, se réduisent à deux

distinctes pour lesquelles on peut prendre

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut, n° **45**,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

Ces deux périodes peuvent être regardées, n° **50**, comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\,dz$ prises le long de certaines lignes AH'A', AH''A'' menées du point A aux points A' et A'', et en disposant convenablement des lignes CDA, CD'A', CD''A'', *fig.* 12, avec lesquelles les contours (A), (A'), (A'') se confondent sensiblement, on peut supposer que les lignes AH'A', AH''A'' sont précisément les droites AA', AA''. Alors, si l'on veut exprimer ces périodes par d'autres intégrales où la variable passe de la limite inférieure à la limite supérieure par une suite de valeurs réelles et croissantes, il suffira de faire dans la première

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a' - a}{2} z',$$

et dans la seconde

$$z = \frac{a + a''}{2} + \frac{a'' - a}{2} z'',$$

z' et z'' désignant deux nouvelles variables. Supprimant ensuite les accents de ces lettres sous le signe intégral, on trouvera que les deux périodes sont

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a'}{2} - a'' + \frac{a' - a}{2} z\right)}},$$

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a''}{2} - a' + \frac{a'' - a}{2} z\right)}}.$$

Si l'on avait, par exemple,

$$a = \frac{a' + a''}{2},$$

l'une de ces périodes serait le produit de l'autre par $\sqrt{-1}$.

54. Supposons maintenant que u soit déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')\,u^2 = h^2;$$

nous trouverons d'abord les seize périodes :

$$\begin{array}{llll}
A_1 + A_2, & A_1 + A'_2, & A_1 + A''_2, & A_1 + A'''_2, \\
A_2 + A'_1, & A_2 + A''_1, & A_2 + A'''_1, & A'_1 + A'_2, \\
A'_1 + A''_2, & A'_1 + A'''_2, & A'_2 + A''_1, & A'_2 + A'''_1, \\
A''_1 + A''_2, & A''_1 + A'''_2, & A''_2 + A'''_1, & A'''_1 + A'''_2.
\end{array}$$

A l'aide des équations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

qui se déduisent de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on réduira ces périodes à six, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1, \quad A'_1 - A''_1, \quad A'_1 - A'''_1, \quad A''_1 - A'''_1.$$

La quatrième est la différence des deux premières; la cinquième est la différence de la première et de la troisième; enfin la sixième est la différence de la deuxième et de la troisième : de ces six périodes, il n'y a donc lieu de conserver que les trois premières, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1.$$

Mais les points A, A', A'', A''' étant en nombre pair, on peut appliquer ici la remarque du n° 47. Supposons ces points A, A', A'', A''' nommés dans un ordre tel, que le contour fermé $(+A)(+A')(+A'')(+A''')$ puisse, sans franchir ces points, se réduire à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous quatre; observons, de plus, que les développements de u_1 et de u_2 suivant les puissances descendantes de z ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{z}$; nous obtiendrons les deux équations

$$A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 = 0, \quad A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 = 0,$$

lesquelles, en vertu des relations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

se réduisent à l'équation unique

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0,$$

ou bien

$$A_1 - A'''_1 = A_1 - A''_1 - (A_1 - A'_1).$$

De toutes nos périodes, il n'y en a donc définitivement que deux distinctes, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

On voit, comme au numéro précédent, que ces deux quantités peuvent être regardées comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\,dz$, ou ce qui est la même chose, $2\int_a^{a'} u_1\,dz$, $2\int_a^{a''} u_1\,dz$ prises respectivement le long des droites AA', AA".

Supposons, par exemple, que l'équation en u soit

$$(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)\,u^2 = 1,$$

où k est un nombre positif moindre que 1. Prenons l'origine O des coordonnées pour point de départ de Z; appelons u_1 celles des deux valeurs de z dont la valeur initiale est $+1$, et nommons A, A', A", A''' les points qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ de z. Alors, pour périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$, nous pourrons adopter les deux sommes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, ou, ce qui est la même chose, les deux quantités

$$2\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

ces intégrales étant prises le long des droites AA', AA".

De ces deux périodes, la seconde est réelle et égale à

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

l'autre est imaginaire et égale à

$$-2\sqrt{-1}\int_{+1}^{+\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

En posant

$$1-k^2=k'^2,\quad z=\frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2z'^2},$$

on ramènera cette dernière quantité à la forme

$$-2\sqrt{-1}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Si donc nous faisons avec M. Jacobi (*Fundamenta nova*, etc.)

$$\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\mathrm{K},\quad \int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=\mathrm{K}',$$

où z est supposée croître de zéro à l'unité par une suite de valeurs réelles, les deux périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$ seront $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

Posons

$$\int_0^z u_1\,dz=v;$$

z sera la fonction de v que M. Jacobi appelle $\sin\operatorname{am} v$: il suit de ce qui précède que z conservant la même valeur, on peut ajouter à v des multiples entiers quelconques de $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; en d'autres termes, on aura

$$\sin\operatorname{am}\left(v+4l\mathrm{K}+2l'\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right)=\sin\operatorname{am} v,$$

l et l' désignant des nombres entiers quelconques. On retrouve ainsi une propriété connue des fonctions elliptiques.

Faisons à présent

$$1-z^2=x^2,$$

x étant une nouvelle variable : cette variable sera précisément la fonction de v représentée par $\cos\operatorname{am} v$. Dans l'équation différentielle

$$dv^2=u_1^2\,dz=\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

introduisons la variable x au lieu de z; il viendra

$$dv^2 = \frac{dx^2}{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)};$$

on aura donc

$$v = \int_1^x u'_1\, dz,$$

u'_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)u'^2 = 1.$$

Si l'on veut appliquer à cette intégrale la théorie précédente, on prendra pour les points A, A′, A″, A‴, ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, -1, $-\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, et les deux périodes seront $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$. La période $A_1 + A'_2$ est égale à l'intégrale $2\int_1^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite AA′, ou, ce qui est la même chose, à la somme de l'intégrale $2\int_1^0 u'_1\, dz$ prise le long de la droite AO, et de l'intégrale $2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite OA′, O étant l'origine des coordonnées; on a donc

$$A_1 + A'_2 = 2\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} + 2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}},$$

où les intégrales du second membre sont ce que M. Cauchy appelle des *intégrales rectilignes*. Si l'on fait, dans la première,

$$z = \sqrt{1-z'^2},$$

et qu'ensuite on supprime l'accent, on trouve

$$\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -K,$$

et si, dans la seconde, on pose

$$z = \frac{k'\sqrt{-1}}{k}\sqrt{1-z'^2},$$

on trouve de même

$$\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = \sqrt{-1}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = K'\sqrt{-1}\,;$$

il en résulte

$$A_1 + A'_2 = -2(K - K'\sqrt{-1}).$$

L'autre période $A_1 + A''_2$ est la valeur de l'intégrale $2\int_{+1}^{-1} u'_1\,dz$, prise le long de la droite AA''; on a donc

$$A_1 + A''_1 = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = 4\int_{+1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -4K.$$

Ainsi, pour les deux périodes de l'intégrale $\int_1^z u'_1\,dz$, on peut prendre les deux quantités

$$4K,\quad 2(K - K'\sqrt{-1}),$$

et, par conséquent, on retrouve la propriété de la fonction $\cos \mathrm{am}\, v$ exprimée par l'équation

$$\cos \mathrm{am}\left[v + 4lK + 2l'(K - K'\sqrt{-1})\right] = \cos \mathrm{am}\, v.$$

Soit enfin

$$1 - k^2z^2 = y^2,$$

y désignant encore une nouvelle variable : cette variable sera la fonction de v représentée par $\Delta \mathrm{am}\, v$. L'équation différentielle

$$dv^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

deviendra

$$dv^2 = \frac{dy^2}{(1-y^2)(y-k'^2)}\,;$$

on aura donc

$$v = \int_1^y u''_1\,dz,$$

u''_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(z^2-k'^2)u''^2 = 1.$$

Pour les points A, A′, A″, A‴, on pourra prendre ici ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+k'$, $+1$, $-k'$, -1 de z, et alors on trouvera, pour valeurs des périodes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, les intégrales rectilignes

$$2\int_{k'}^{1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

$$2\int_{k'}^{-k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = -4\int_0^{k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}.$$

La première est réelle, et en y faisant

$$z = \sqrt{1-k^2z'^2},$$

elle devient

$$2\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2\,\mathrm{K};$$

la seconde est imaginaire, et, en posant

$$z = k'z',$$

elle prend la forme

$$4\sqrt{-1}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = 4\,\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$$

L'intégrale $\int_1^y u''_1\,dz$ ayant les deux périodes

$$2\,\mathrm{K},\quad 4\,\mathrm{K}'\sqrt{-1},$$

on en conclut l'équation

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(v + 2l\,\mathrm{K} + 4l'\,\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \Delta\,\mathrm{am}\,v,$$

qui est également une formule connue de la théorie des fonctions elliptiques.

On voit que les deux quantités

$$4\,\mathrm{K},\quad 4\,\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

sont des périodes communes aux trois fonctions $\sin\mathrm{am}\,v$, $\cos\mathrm{am}\,v$, $\Delta\,\mathrm{am}\,v$; car, pour reconnaître que $4\,\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ est une période de

cos am v, il suffit d'observer qu'on a

$$4K - 2(2K - 2K'\sqrt{-1}) = 4K'\sqrt{-1};$$

ainsi, en désignant par $\varphi(v)$ une quelconque de ces fonctions ou une fonction rationnelle des trois, on aura

$$\varphi(v + 4lK + 4l'K'\sqrt{-1}) = \varphi(v).$$

55. Dans le cas du numéro précédent, les trois périodes

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1$$

ont été réduites à deux en vertu de l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0;$$

mais cette réduction n'aurait plus lieu, en général, si la fonction u_1 était déterminée par l'équation

$$(z - a)(z - a')(z - a'')(z - a''')u^2 - H^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des quatre facteurs $z - a$, $z - a'$, $z - a''$, $z - a'''$. Il sera inutile, dans la recherche des périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, d'avoir égard aux points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires (A), (A'), (A''), etc., et les intégrales élémentaires correspondantes seront toutes nulles. En désignant par A, A', A'', A''' les points pour lesquels z a respectivement les valeurs a, a', a'', a''', on trouvera, comme au numéro précédent, que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ admet les trois périodes

$$A_1 - A'_1 = p', \quad A_1 - A''_1 = p'', \quad A_1 - A'''_1 = p'''.$$

Mais la considération de la circonférence décrite de l'origine des coordonnées comme centre et renfermant les points A, A', A'', A''', A, A', A'', etc., nous donnera ici l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')}},$$

suivant les puissances descendantes de z. Tant que le polynôme H ne se réduira pas à une constante, le coefficient λ ne sera pas nul, au moins en général; les périodes p', p'', p''' seront donc distinctes et ne se réduiront à deux que dans des cas particuliers.

56. Passons à présent au cas où la fonction u est déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]u^2 - h^2 = 0,$$

h désignant une constante et a, a',..., $a^{(n-1)}$ des quantités toutes inégales. On trouvera sans difficulté que les périodes de l'intégrale $\int_c^z u_1 dz$ se réduisent aux $n-1$ suivantes :

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 = p', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1 = p'', \ldots, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Ces périodes seront, en général, distinctes, si le nombre n est impair; mais, s'il est pair, la considération de la circonférence qui renferme tous les points A, A', A'', etc., conduira à l'équation

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}'''_1 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(n-2)} - \mathrm{A}_1^{(n-1)} = 0,$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

en vertu de laquelle les $n-1$ périodes se réduisent à $n-2$ distinctes, savoir :

$$p', \quad p'', \quad p''', \ldots, \quad p^{(n-2)}.$$

En d'autres termes, le nombre des périodes distinctes est $2n$, lorsque le nombre des quantités a, a', a'', etc., est $2n+1$ ou $2n+2$, sauf le cas où ce dernier nombre étant égal à 2, celui des périodes est 1.

Observons que les périodes p', p'', p''', etc., ne sont autre chose que les valeurs de l'intégrale

$$\int (u_1 - u_2)\,dz = 2\int u_1\,dz,$$

prise le long des droites AA', AA'', AA''', etc.

57. Le nombre n étant supposé pair, considérons encore l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]u^2 - \mathrm{H}^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, etc. Par les mêmes raisons qu'au n° **55**, il sera inutile de tenir compte des valeurs de z qui annulent H : les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ seront donc, comme tout à l'heure, les $n-1$ quantités

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 = p', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1 = p'', \ldots, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Mais tandis que tout à l'heure on avait l'équation

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

qui réduisait à $n-2$ le nombre des périodes distinctes, on aura ici, n° **50**,

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, et tant que λ ne sera pas nul, les $n-1$ périodes resteront, en général, distinctes.

Le coefficient λ serait nul si le degré du polynôme H était moindre que $\frac{n}{2}-1$; alors le nombre des périodes se réduirait à $n-2$. C'est ce qui arriverait, par exemple, pour l'intégrale

$$\int_c^k \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{\sqrt{\mathrm{P}}},$$

P désignant un polynôme du sixième degré en z; au lieu de cinq périodes distinctes, cette intégrale n'en aura que quatre.

Un autre cas où λ serait nul est celui où les polynômes H et $(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]$ seraient l'un et l'autre des fonctions paires de z, le degré du second étant, en outre, un multiple de 4.

58. Il est aisé de retrouver dans ce qu'on vient de dire les périodes des fonctions de plusieurs variables introduites par M. Jacobi dans la théorie des transcendantes abéliennes. Soient, par exemple, u et u' deux fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré,

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u^2-(\alpha+\beta z)^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u'^2-(\alpha'+\beta' z)^2=0;$$

l'intégrale $\int_c^z u_1\,dz$ ayant, comme on l'a vu précédemment, quatre périodes, on peut, sans changer les limites et en disposant convenablement du chemin parcouru par le point Z, faire prendre à cette intégrale une valeur aussi voisine qu'on voudra d'une quantité donnée quelconque. Si donc on pose

$$\int_c^z u\,dz = v,$$

on ne pourra regarder z comme une fonction de v, puisque, z restant le même, v peut varier par degrés aussi petits qu'on voudra. Mais si l'on fait

$$\int_c^z u\,dz + \int_{c'}^{z'} u\,dz = v,\quad \int_c^z u'\,dz + \int_{c'}^{z'} u'\,dz = v',$$

les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ étant prises le long d'une même ligne CMZ, et les intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ aussi le long d'une même ligne C'M'Z', on peut prouver, à l'aide du théorème d'Abel, que z et z' sont des fonctions déterminées de v et de v'; nous poserons donc

$$z=\varphi(v,v'),\quad z'=\varphi'(v,v').$$

Concevons maintenant qu'on vienne à changer le chemin CMZ, les points extrêmes C et Z restant les mêmes : si l'on appelle p, q, r, s les périodes trouvées ci-dessus de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, et p', q', r', s' les périodes de l'intégrale $\int_c^z u'\,dz$, les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ s'accroîtront respectivement des quantités

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls',$$

où h, k, i, l désignent quatre nombres entiers quelconques ayant les mêmes valeurs dans les deux formules. En effet, pour les deux fonctions u et u', les points A, A', A'', A''', A$^{\text{iv}}$ sont les mêmes; par conséquent, tout contour fermé aura la même caractéristique relativement à ces deux fonctions.

On voit de la même manière que si l'on vient à changer le chemin C' M' Z', les points extrêmes C' et Z' restant les mêmes, les deux intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ augmenteront encore respectivement de quantités de la forme

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls'.$$

Ainsi les quantités z et z', ou, si l'on veut, les fonctions $\varphi(v, v')$, $\varphi'(v, v')$ gardant les mêmes valeurs, on peut ajouter à la variable v l'expression

$$hp + iq + kr + ls,$$

pourvu qu'en même temps on ajoute à la variable v' l'expression

$$hp' + iq' + kr' + ls'.$$

En d'autres termes, on a les deux équations

$$\varphi\,(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi\,(v, v'),$$
$$\varphi'(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi'(v, v').$$

On retrouve ainsi pour les fonctions φ et φ' le caractère de quadruple périodicité signalé par M. Jacobi dans un Mémoire qui fait partie du Journal de M. Crelle (tome XIII, page 55) : on voit d'ailleurs ce que

sont les périodes $p, q, r, s, p', q', r', s'$. Appelons A, A', A'', A''', A^{iv} les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise respectivement le long des contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, $(+A''')$, $(+A^{\text{iv}})$; soient pareillement $A_,$, $A'_,$, $A''_,$, $A'''_,$, $A^{\text{iv}}_,$ les valeurs de l'intégrale $\int u'\,dz$ prise le long des mêmes contours; on pourra adopter pour ces périodes les valeurs suivantes :

$$p = A - A', \quad q = A - A'', \quad r = A - A''', \quad s = A - A^{\text{iv}},$$
$$p' = A_, - A'_,, \quad q' = A_, - A''_,, \quad r' = A_, - A'''_,, \quad s' = A_, - A^{\text{iv}}_,.$$

On peut dire encore que si l'on joint le point A à chacun des points A', A'', A''', A^{iv}, les périodes p, q, r, s sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA', AA'', AA''', AA^{iv}, tandis que les périodes p', q', r', s' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'\,dz$ prise le long de ces mêmes lignes.

La proposition qu'on vient d'expliquer peut être aisément généralisée. Soient a, a', a'', etc., des quantités inégales quelconques au nombre de $2m$ ou $2m-1$: appelons u, u',..., $u^{(m-2)}$ des fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^2 - (\alpha + \beta z + \ldots + \varepsilon z^{m-2})^2 = 0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u'^2 - (\alpha' + \beta' z + \ldots + \varepsilon' z^{m-2})^2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^{(m-2)^2} - \left[\alpha^{(m-2)} + \beta^{(m-2)} z + \ldots + \varepsilon^{(m-2)} z^{m-2}\right]^2 = 0.$$

Posons

$$\int_c^z u\,dz + \int_{c'}^{z'} u\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u\,dz = v,$$
$$\int_c^z u'\,dz + \int_{c'}^{z'} u'\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u'\,dz = v',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int_c^z u^{(m-2)}\,dz + \int_{c'}^{z'} u^{(m-2)}\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u^{(m-2)}\,dz = v^{(m-2)},$$

les intégrales qui ont pour limites c et z étant toutes prises le long d'une même ligne CMZ, celles qui ont pour limites c' et z' étant également prises le long d'une même ligne C'M'Z', et ainsi de suite. On pourra regarder $z, z',\ldots, z^{(m-2)}$ comme des fonctions de $v, v',\ldots, v^{(m-2)}$, et écrire

$$z = \varphi[v, v',\ldots, v^{(m-2)}],\quad z' = \varphi'[v, v',\ldots, v^{(m-2)}],\ldots,$$
$$z^{(m-2)} = \varphi^{(m-2)}[v, v',\ldots, v^{(m-2)}]$$

Si maintenant on désigne par $p, q,\ldots, t$ les $2m-2$ périodes de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, par $p', q',\ldots, t'$ celles de l'intégrale $\int^z u'dz$, et ainsi de suite, on prouvera, comme tout à l'heure, que l'on a, pour une quelconque des fonctions $\varphi, \varphi',\ldots, \varphi^{(m-2)}$,

$$\varphi^{(k)}\begin{bmatrix} v + hp + iq + \ldots + lt, \\ v' + hp' + iq' + \ldots + lt',\ldots, \\ v^{(m-2)} + hp^{(m-2)} + iq^{(m-2)} + \ldots + lt^{(m-2)} \end{bmatrix} = \varphi^{(k)}[v, v',\ldots, v^{(m-2)}],$$

$h, i,\ldots, l$ étant des nombres entiers quelconques. Quant aux périodes $p, q,\ldots, t, p', q'$, etc., on les exprime sans peine à l'aide des notations adoptées précédemment : en effet, soient A, A', A'', etc., les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long des contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc.; soient $A_{,}, A'_{,}, A''_{,}$, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u'dz$ prise le long des mêmes contours, $A_{,,}, A'_{,,}, A''_{,,}$, etc., celles de l'intégrale $\int u''dz$, et ainsi de suite : on pourra prendre

$$p = A - A',\quad q = A - A'',\ldots,\quad t = A - A^{(2m-2)},$$
$$p' = A_{,} - A'_{,},\quad q' = A_{,} - A''_{,},\ldots,\quad t' = A_{,} - A_{,}^{(2m-2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A'_{(2m-2)},\ldots,\quad q^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A''_{(2m-2)},\ldots,$$
$$t^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A_{(2m-2)}^{(2m-2)}.$$

On peut dire encore que les périodes $p, q,\ldots, t$ sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA', AA'',..., AA$^{(2m-2)}$;

pareillement, les périodes p', q',..., t' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'dz$ prise suivant les mêmes lignes, et ainsi de suite.

59. Après avoir montré comment notre théorie fournit le nombre et l'expression des périodes de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$, dans le cas où la fonction u dépend d'une équation du second degré, nous allons encore l'appliquer à des fonctions déterminées par des équations d'un degré plus élevé. Prenons, par exemple, l'équation binôme

$$(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]\,u^n - \mathrm{H}^m = 0,$$

où a, a',..., $a^{(n-1)}$ désignent des quantités inégales, et H un polynôme entier qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$,..., $z-a^{(n-1)}$. On pourra, dans la recherche des diverses valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$, se dispenser d'avoir égard aux points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car, après une révolution de Z sur le contour élémentaire qui enveloppe un de ces points, chacune des fonctions u_1, u_2, etc., reprend sa valeur initiale, et, de plus, les intégrales élémentaires relatives à un pareil contour sont toutes nulles. Soient maintenant A, A', A'',..., $\mathrm{A}^{(n-1)}$ les points qui répondent respectivement aux valeurs a, a',..., $a^{(n-1)}$ de z; il nous est permis de les supposer rangés dans un ordre tel, que le contour fermé qui a pour caractéristique

$$(+\mathrm{A})(+\mathrm{A}')(+\mathrm{A}'')\ldots[+\mathrm{A}^{(n-1)}]$$

puisse se réduire, sans franchir aucun de ces points, à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous.

Pour abréger l'écriture, nous ferons

$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}'_1=p'_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}'_2=p'_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}'_m=p'_m,$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}''_1=p''_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}''_2=p''_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}''_m=p''_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_1^{(n-1)}=p_1^{(n-1)},\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}_2^{(n-1)}=p_2^{(n-1)},\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}_m^{(n-1)}=p_m^{(n-1)},$$

d'où il suit, en appelant q, r, s des nombres entiers,

$$A_s^{(q)} - A_s^{(r)} = p_s^{(r)} - p_s^{(q)}.$$

Nous observerons ensuite que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ peuvent être supposées rangées dans un ordre tel, que chacune d'elles acquière la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours $(+A)$, $(+A')$,..., $[+A^{(n-1)}]$; cela revient à prendre

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \ldots, \quad u_m = e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1.$$

Alors aussi chacune de ces fonctions acquerra la valeur initiale de la précédente après une révolution de Z sur un des contours $(-A)$, $(-A')$,..., $[-A^{(n-1)}]$, et l'on aura par conséquent

$$A_{-1}^{(i)} = -A_m^{(i)}, \quad A_{-2}^{(i)} = -A_1^{(i)}, \quad A_{-3}^{(i)} = -A_2^{(i)}, \ldots, \quad A_{-m}^{(i)} = -A_{m-1}^{(i)}.$$

Enfin nous appellerons $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz, \int_c^k u_2\,dz, \ldots, \int_c^k u_m\,dz$, prises le long d'un chemin déterminé CMK.

Cela posé, il s'agit d'obtenir les expressions générales des valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un chemin quelconque CLK.

La caractéristique de ce chemin étant donnée, il sera aisé d'écrire la valeur de l'intégrale : à chaque terme $[+A^{(q)}]$ de la caractéristique répondra, dans l'expression de l'intégrale, un terme de la forme $+A_i^{(q)}$, et, à chaque terme $[-A^{(q)}]$ de la caractéristique, un terme de la forme $-A_i^{(q)}$; au dernier terme CMK de la caractéristique répondra, dans l'intégrale, un terme tel que $+v_j$. Les indices i et j sont des nombres entiers et positifs qui se déterminent comme il suit : l'indice du premier terme de l'intégrale est 1, si ce terme est affecté du signe $+$, m, s'il est affecté du signe $-$; si deux termes consécutifs ont le signe $+$, l'indice du second surpasse d'une unité celui du premier; si ces deux termes ont le signe $-$, c'est au contraire l'indice du premier qui sur-

passe d'une unité celui du second [*]; enfin, si deux termes consécutifs ont des signes contraires, leurs indices sont égaux.

Admettons, pour fixer les idées, que, dans la caractéristique du chemin CLK, le nombre des termes positifs surpasse celui des termes négatifs; il en sera de même dans l'expression de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$. Partageons cette expression à partir de la gauche en parties telles, que dans chacune d'elles le nombre des termes positifs surpasse de m unités celui des termes négatifs, sauf la dernière partie où la différence entre ces deux nombres peut être inférieure à m. La valeur d'une quelconque de ces parties, la dernière exceptée, pourra s'obtenir en ajoutant à la somme

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m$$

un certain nombre de différences de la forme $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$; comme d'ailleurs, en vertu de l'équation

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,$$

la partie dont nous nous occupons se réduit à une somme de différences telles que $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$, et peut se représenter en conséquence par la formule

$$\begin{aligned}\varpi = {} & l'_1 p'_1 + l''_1 p''_1 + \ldots + l_1^{(n-1)} p_1^{(n-1)} \\ & + l'_2 p'_2 + l''_2 p''_2 + \ldots + l_2^{(n-1)} p_2^{(n-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + l'_m p'_m + l''_m p''_m + \ldots + l_m^{(n-1)} p_m^{(n-1)},\end{aligned}$$

où les lettres l'_1, l''_1,..., $l_1^{(n-1)}$, l'_2, etc., représentent des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, et pouvant d'ailleurs avoir des valeurs quelconques. Les autres parties de l'expression de $\int_c^k u_1\,dz$ auront la

[*] Il est à peine nécessaire d'avertir que l'indice m augmenté d'une unité doit être remplacé par 1, et que l'indice 1 diminué d'une unité doit être remplacé par m.

même forme, sauf la dernière : quant à celle-ci, on voit aisément qu'à une quantité près de la forme ϖ, elle aura toujours une des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&v_1,\\
&A_1 + v_2,\\
&A_1 + A_2 + v_3,\\
&A_1 + A_2 + A_3 + v_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.
\end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les valeurs que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de C en K par tel ou tel chemin, sont comprises dans les m formules

$$\begin{aligned}
&\varpi + v_1,\\
&\varpi + A_1 + v_2,\\
&\varpi + A_1 + A_2 + v_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varpi + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.
\end{aligned}$$

On a supposé, il est vrai, que dans l'expression de l'intégrale relative au chemin CLK, le nombre des termes positifs surpassait celui des termes négatifs ; si le contraire avait lieu, on ramènerait ce second cas au premier, en ajoutant à l'expression dont il s'agit une ou plusieurs fois la quantité $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ dont la valeur est zéro, et l'on arriverait encore à la même conclusion.

On voit par là que les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p_1^{(n-1)}, p'_2, \ldots, p_1^{(n-1)}$ sont autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, et que toute autre période de la même intégrale doit être composée de celles-là : de plus, toutes les valeurs en nombre infini de $\int_c^k u_1\,dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant à m d'entre elles choisies convenablement des multiples entiers quelconques des périodes.

Considérons en particulier la période $p'_i = A_i - A'_i = A_i + A'_{-(i+1)}$; on voit qu'elle est égale à l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long du contour fermé $(+A)(-A')$, et comme, après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_i reprend sa valeur initiale, on en conclut que la période p'_i est indépendante de la position du point C, n° **11**. Or, sans faire franchir au contour $(+A)(-A')$ aucun des points A, A', A'', etc., on peut le faire coïncider avec un contour qui se compose de la ligne D'HD, *fig.* 25, du contour fermé infiniment petit DFED parcouru dans le sens direct, de la ligne DHD', et enfin du contour infiniment petit D'F'E'D' parcouru dans le sens inverse : la période p'_i peut donc être regardée comme exprimant la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ relative à ce nouveau contour. Mais le produit $(z-a)u_i$ se réduisant à zéro pour $z=a$, ainsi que le produit $(z-a')u_i$ pour $z=a'$, on prouvera, comme au n° 50, que les portions d'intégrale relatives aux contours infiniment petits DEFD, D'F'E'D' ont zéro pour limites, et l'on en conclura qu'on peut regarder p'_i comme la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux chemins D'HD, DHD' : en d'autres termes, la période p'_i est la valeur de l'intégrale $\int (u_i - u_{i+1}) dz$ prise le long de la ligne A'HA.

Ce que nous venons de dire de la période p'_i peut s'appliquer à toutes les autres : ainsi chacune d'elles peut être regardée comme la valeur de l'une des intégrales $\int (u_1 - u_2) dz$, $\int (u_2 - u_3) dz, \ldots$, $\int (u_m - u_1) dz$, prise le long d'une ligne menée de l'un des points $A', A'', \ldots, A^{(n-1)}$ au point A.

Les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p_m^{(n-1)}$ sont au nombre de $m(n-1)$; mais il existe entre elles des relations faciles à obtenir. Comme on l'a déjà remarqué, on a

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

et, par suite,

$$\begin{gathered} A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0, \\ A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_m = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} + \ldots + A_m^{(n-1)} = 0, \end{gathered}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-1)} + \ldots + p_m^{(n-1)} = 0.$$

On voit que les $n-1$ périodes $p'_m, p''_m, \ldots, p_m^{(n-1)}$ peuvent s'exprimer chacune par la somme prise en signe contraire de $m-1$ autres, ce qui réduit à $(m-1)(n-1)$ le nombre des périodes distinctes.

Rappelons-nous maintenant ce qui a été démontré tout à l'heure, que les périodes

$$p'_1, \quad p'_2, \quad p'_3, \ldots, \quad p'_m$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\int (u_1 - u_2)\,dz, \quad \int (u_2 - u_3)\,dz, \quad \int (u_3 - u_4)\,dz, \ldots, \quad \int (u_m - u_1)\,dz,$$

prises le long d'une même ligne menée du point A' au point A, et, d'un autre côté, ayons égard aux équations

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, u_1, \ldots, \quad u_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, u_1;$$

nous en conclurons que les périodes

$$p'_1, \quad p'_2, \quad p'_3, \ldots, \quad p'_m,$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz, \quad e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$
$$e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz, \ldots, \quad e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$

prises le long d'une même ligne A'A; il en résulte sur-le-champ

$$p'_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p'_1, \quad p'_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p'_1, \ldots, \quad p'_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p'_1,$$

et l'on trouvera de même

$$p''_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p''_1,\quad p''_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p''_1,\ldots,\quad p''_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}}\,p''_1,$$

. . . .

$$p_2^{(n-1)} = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p_1^{(n-1)},\ p_3^{(n-1)} = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p_1^{(n-1)},\ldots,\ p_m^{(n-1)} = e^{-\frac{(m-2).2\pi}{m}}\,p_1^{(n-1)}.$$

Ces relations comprennent les équations

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
etc.,

déjà établies tout à l'heure; on n'en déduit pas d'ailleurs d'autre équation propre à diminuer le nombre des périodes distinctes.

Considérons spécialement le cas où le nombre n des quantités a, a', a'', etc., est un multiple de m; alors chacune des fonctions $u_1, u_2,\ldots, u_m$ reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un contour fermé qui entoure tous les points A, A', A'', etc., et il y aura lieu d'appliquer à chacune d'elles la remarque du n° **47**. En appelant λ le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[m]{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, on trouvera les équations

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_3 + \mathrm{A}''_4 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}'_4 + \mathrm{A}''_5 + \ldots + \mathrm{A}_2^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

. . . .

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p_m^{(n-1)} = -2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p_1^{(n-1)} = -2\pi\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$p'_4 + p''_5 + p'''_6 + \ldots + p_2^{(n-1)} = -2\pi\lambda e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p_{m-1}^{(n-1)} = -2\pi\lambda e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

Ces m équations se réduisent à $m-1$ distinctes en vertu des relations déjà établies entre les périodes; car, en les ajoutant membre à membre, on arrive à l'identité $0=0$. Si, de plus, le coefficient λ est nul, on pourra de ces équations tirer $m-1$ périodes exprimées chacune par la somme prise en signe contraire de plusieurs autres, et le nombre des périodes distinctes, qui était $(m-1)(n-1)$, se trouvera réduit à $(m-1)(n-2)$. Cette circonstance se présentera, en particulier, lorsque le degré du polynôme Π sera inférieur au nombre entier $\frac{n}{m}-1$.

Il est aisé de voir quelles sont dans ces différents cas les périodes qu'on devra regarder comme distinctes. En effet, lorsque n ne sera pas un multiple de m, ou lorsque n étant divisible par m, λ sera quelconque, on pourra, en vertu des équations

$$p'_m = -p'_1 - p'_2 - p'_3 - \ldots,$$
$$p''_1 = -p''_2 - p''_3 - p''_4 - \ldots,$$
$$p'''_2 = -p'''_3 - p'''_4 - p'''_5 - \ldots,$$
etc.,

exclure les périodes p'_m, p''_1, p'''_2, etc., et les $(m-1)(n-1)$ restantes seront généralement distinctes. Mais si, n étant divisible par m, λ est nul, on aura entre ces périodes restantes les $m-1$ équations

$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p_{m-1}^{(n-1)} = 0,$$

$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p_m^{(n-1)} = 0,$$

$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p_1^{(n-1)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_{m-1} + p''_m + p'''_1 + \ldots + p_{m-3}^{(n-1)} = 0;$$

d'où l'on tire

$$p'_1 = -p''_2 - p'''_3 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-1},$$

$$p'_2 = -p''_3 - p'''_4 - \ldots - p^{(n-1)}_{m},$$

$$p'_3 = -p''_4 - p'''_5 - \ldots - p^{(n-1)}_{1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p'_{m-1} = -p''_m - p'''_1 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-3},$$

ce qui permet d'exclure encore les périodes $p'_1, p'_2, \ldots, p_{m-1}$. Ainsi, dans le cas général où le nombre des périodes distinctes est $(m-1)(n-1)$, on peut prendre pour ces périodes les quantités

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & p'_2, & p'_3, \ldots, & p'_{m-3}, & p'_{m-2}, & p'_{m-1}, \\
p''_2, & p''_3, & p''_4, \ldots, & p''_{m-2}, & p_{m-1}, & p''_m, \\
p'''_1, & p'''_3, & p'''_4, \ldots, & p'''_{m-2}, & p'''_{m-1}, & p'''_m, \\
p^{\text{iv}}_1, & p^{\text{iv}}_3, & p^{\text{iv}}_4, \ldots, & p^{\text{iv}}_{m-2}, & p^{\text{iv}}_{m-1}, & p^{\text{iv}}_m, \\
\text{etc.,} & & & & &
\end{array}$$

ou bien, en représentant par ω l'exponentielle $e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}$,

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & \omega\, p'_1, & \omega^3 p'_1, \ldots, & \omega^{m-4} p'_1, & \omega^{m-3} p'_1, & \omega^{m-2} p'_1, \\
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega\, p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1, \\
\text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

Lorsque le nombre n sera divisible par m et que le coefficient λ sera nul, il suffira, pour avoir les $(m-1)(n-2)$ périodes distinctes, de supprimer la première ligne horizontale dans l'un ou l'autre des deux tableaux précédents. Ces périodes seront donc

$$\begin{array}{llllll}
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega\, p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_1, & \omega p^{(n-1)}_1, & \omega^2 p^{(n-1)}_1, \ldots, & \omega^{m-4} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-3)} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-1)} p^{(n-1)}_1.
\end{array}$$

60..

60. Pour dernière application, considérons l'équation du troisième degré

$$u^3 - u + z = 0.$$

Appelons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions déterminées par cette équation, qui, pour la valeur initiale $z = 0$, se réduisent respectivement à 0, $+1$, -1. On a prouvé, n° **32**, que la première et la deuxième deviennent égales lorsque le point Z, parti de l'origine O, arrive au point A qui répond à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, après avoir suivi la droite OA, et que la première et la troisième deviennent égales, lorsque le point Z, parti de l'origine, arrive par la droite OA' au point A' qui répond à $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$; les points A et A' sont d'ailleurs les seuls pour lesquels l'équation proposée puisse avoir des racines égales. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires (A) et (A') se confondent sensiblement avec les droites OA, OA'; nommons v_1, v_2, v_3 les valeurs des intégrales $\int_0^k u_1\,dz$, $\int_0^k u_2\,dz$, $\int_0^k u_3\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé OMK, et proposons-nous de trouver toutes les valeurs que l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de O en K par tel ou tel chemin.

On a vu, n° **32**, qu'après une révolution de Z sur le contour (A), les racines u_1 et u_2 échangent leurs valeurs initiales, tandis que u_3 reprend la sienne : la fonction $u_1 + u_2$ reprend donc aussi sa valeur initiale. Par suite, les intégrales $\int u_3\,dz$, $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prises le long du contour $(+A)$, ne changeront pas si l'on suppose que ce contour se réduise à une ligne fermée infiniment petite tracée autour du point A; comme, en ce point, les fonctions u_3 et $u_1 + u_2$ conservent des valeurs finies, on en conclut, n° **46**,

$$A_3 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0.$$

On reconnaît aisément que les intégrales A_3 et A_{-3} sont composées d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires; il en est de même des deux intégrales A_1, A_{-2}, et aussi des deux intégrales A_2, A_{-1}; on a donc

$$A_3 = A_{-3} = 0, \quad A_1 = -A_2 = A_{-1} = -A_{-2} :$$

on trouvera pareillement

$$A'_2 = A'_{-2} = 0, \quad A'_1 = -A'_{-3} = A'_{-1} = -A'_{-3}.$$

On conclut d'abord de ces égalités qu'on peut changer le signe d'un terme quelconque de la caractéristique sans altérer la valeur de l'intégrale cherchée : on pourra donc se dispenser de mettre ce signe en évidence. Observons que, sur le contour (A)(A), chacune des fonctions u_1, u_2, u_3 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z, et que les intégrales $\int u_1 dz$, $\int u_2 dz$, $\int u_3 dz$, prises le long de ce contour, se réduisent à zéro en vertu des relations précédentes. Par conséquent, si dans la caractéristique du chemin quelconque OLK suivi par Z, on trouve les deux termes consécutifs (A)(A), il sera permis de les supprimer : le même raisonnement s'applique aux deux termes consécutifs (A')(A'). On peut donc supposer que, dans la caractéristique du chemin OLK, deux termes consécutifs quelconques renferment toujours l'un la lettre A, l'autre la lettre A'.

Alors les trois premiers termes forment nécessairement un des deux groupes suivants :

$$(A)(A')(A), \quad (A')(A)(A');$$

or, après une révolution de Z sur le contour fermé que représente l'un ou l'autre de ces deux groupes, la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, et d'ailleurs l'intégrale $\int u_1 dz$ prise le long de ce contour est nulle. On peut donc, sans altérer l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$, supprimer les trois premiers termes de la caractéristique du chemin OLK; par la même raison, on pourra supprimer les trois suivants, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la caractéristique soit réduite à une de celles-ci,

$$+\text{OMK}, \ (\text{A})+\text{OMK}, \ (\text{A}')+\text{OMK}, \ (\text{A})(\text{A}')+\text{OMK}, \ (\text{A}')(\text{A})+\text{OMK},$$

et les valeurs correspondantes de l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$, seront

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3.$$

On voit donc que, quel que soit le chemin OLK, cette intégrale n'a que trois valeurs distinctes qu'on peut présenter sous la forme

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A_1 + v_3;$$

car de ce que l'équation proposée n'est pas altérée par le changement simultané de u en $-u$ et de z en $-z$, on conclut aisément la relation $A'_1 = A_1$. Le nombre des valeurs de l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$ étant limité, il n'y a pas lieu, dans l'exemple qu'on vient de traiter, à en chercher les périodes.

En général, l'intégrale $\int_c^z u dz$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs, et, par suite, sera dépourvue de périodes, toutes les fois que l'équation entre u et z sera de la forme

$$f(u) = z,$$

$f(u)$ désignant un polynôme entier en u et indépendant de z. En effet, si l'on pose

$$\int_0^z u dz = v,$$

on aura

$$dv = u dz = uf'(u) du,$$

d'où

$$v = \int uf'(u) du = F(u),$$

$F(u)$ désignant un polynôme entier en u. Pour chaque valeur de z, le nombre des valeurs de v est donc égal à celui des valeurs de u, lequel est limité en vertu de l'équation algébrique

$$f(u) = z.$$

Je me propose, dans un autre article, d'appliquer à de nouvelles fonctions les principes établis dans celui-ci; mais je crois devoir, en terminant, signaler d'une manière précise les emprunts que j'ai faits aux travaux de M. Cauchy, et notamment aux remarquables Mémoires qui font partie du tome XXIII des *Comptes rendus* (année 1846). On y lit à la page 700 une définition des fonctions continues, identique à celle que je donne au commencement du présent article; mais je ne crois pas que le savant géomètre ait énoncé les théorèmes des nos 6 et 7, théoremes qui sont indispensables pour l'étude des fonctions ainsi définies.

C'est à M. Cauchy qu'il appartient d'avoir expliqué la véritable idée

qu'on doit se faire d'une intégrale prise entre des limites imaginaires et de ses valeurs multiples : la proposition que je donne à ce sujet, n° **9**, a été démontrée par lui il y a déjà longtemps. (Voir le *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*) Les théorèmes des n^{os} **10**, **11**, **12**, qui en sont des corollaires, reviennent à ceux qu'énonce M. Cauchy dans le tome déjà cité des *Comptes rendus*, pages 253 et 692; ils acquièrent seulement une signification plus précise lorsqu'on sait, par les théorèmes des n^{os} **6** et **7** et par ceux qui sont établis dans la seconde partie du présent Mémoire, dans quels cas la fonction qu'on intègre le long d'un contour reprend ou ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution du point mobile. J'en déduis le développement en série de la fonction u par une méthode qui est due à M. Cauchy et qu'il a plusieurs fois reproduite : lorsque j'ai démontré les propositions que je lui empruntais, c'est que je voulais les appliquer spécialement aux fonctions algébriques, et qu'alors les conditions sous lesquelles elles ont lieu comportent un énoncé plus net.

Dans la seconde partie, j'examine d'abord la manière dont les fonctions u_1, u_2, etc., échangent leurs valeurs autour des points pour lesquels l'équation en u a des racines égales ou infinies, et j'établis à ce sujet, n^{os} **18-27**, des propositions qui me paraissent nouvelles : la possibilité de partager ces fonctions en systèmes circulaires pouvait se déduire d'un théorème de M. Cauchy sur les substitutions (*Journal de l'École Polytechnique*, tome X); mais la méthode que j'ai donnée permet d'effectuer réellement ce partage.

La réduction à un seul chemin et à une série de contours élémentaires de tous les chemins par lesquels on peut aller d'un point à un autre, la notation que j'adopte, et les conséquences que j'en tire relativement aux valeurs que la fonction acquiert par ces divers chemins, me paraissent n'avoir encore été données par personne.

Dans la troisième partie, qui contient les applications au calcul intégral, je commence par réduire une intégrale définie prise le long d'un chemin quelconque à une intégrale prise le long d'un seul chemin, plus une suite d'intégrales élémentaires. Le principe de cette réduction appartient à M. Cauchy, et le calcul indiqué à la page 788 du tome déjà cité des *Comptes rendus* revient à celui de mes intégrales

élémentaires. Mais la notation dont je me sers et l'emploi des propositions établies dans la seconde partie me permettent d'aller plus loin dans le cas où la fonction *u* dépend d'une équation du second degré, ou d'une équation binôme, et encore dans d'autres cas étendus que je traiterai plus tard : je parviens, en effet, nos **50** et **59**, à des formules générales qui comprennent toutes les valeurs d'une intégrale définie prise entre deux limites données et ne comprennent que ces valeurs.

Ces formules sont nécessaires, à mon avis, pour faire connaître toutes les périodes et pour montrer qu'à une valeur quelconque d'une intégrale on peut ajouter des multiples entiers quelconques de toutes les périodes, sans cesser d'avoir une valeur de la même intégrale. Des indications données par M. Cauchy (page 698 du volume cité) on peut bien conclure l'existence d'un certain nombre de périodes, et dans un travail inédit l'illustre analyste retrouve de cette manière les périodes connues des fonctions elliptiques; mais, en suivant cette marche, on n'est pas assuré de les obtenir toutes, et l'on ne voit pas que chacune d'elles appartienne à toutes les valeurs de l'intégrale.

Je dois dire encore que les résultats auxquels je suis arrivé concordent avec ceux qu'a obtenus M. Hermite dans un travail dont l'extrait se trouve au tome XVIII des *Comptes rendus* (séance du 17 juin 1844). Par une heureuse généralisation de la marche qu'a suivie M. Jacobi pour les fonctions abéliennes, l'auteur obtient les expressions des périodes des fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques; mais, pour bien comprendre la signification de ces résultats, il me semble nécessaire de prendre pour point de départ la définition donnée par M. Cauchy des intégrales prises entre des limites imaginaires : c'est à ce point de vue seulement qu'on peut se rendre compte des valeurs multiples de ces intégrales [*].

[*] Je profiterai de cette occasion pour avertir d'une erreur typographique qui se trouve à la page 242 du tome XIV de ce Journal : *au lieu de ces mots*, une démonstration à laquelle j'étais parvenu, *il faut lire* une démonstration plus simple que celle à laquelle j'étais parvenu.

NOTE

SUR

LA THÉORIE DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. VOIZOT.

M. J. Bertrand, dans le § IV du Mémoire sur les courbes à double courbure, qu'il vient de publier dans ce Journal (septembre 1850), recherche quelles sont les surfaces réglées dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes distinctes, et il arrive à la formule

$$(n) \qquad 1 = \frac{a}{\rho} - \frac{C}{R},$$

ρ étant le rayon de courbure de l'une des deux courbes, dans son plan osculateur;

R étant le rayon de la seconde courbure;

a étant la distance qui sépare les points correspondants des deux courbes;

et C une constante arbitraire fournie par l'intégration.

Dans le § VI, M. Bertrand recherche, pour l'hypothèse de a constant, deux autres relations qui permettent d'exprimer les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes en fonction de ceux de l'autre, et il est conduit à deux équations dont il déduit, pour le cas particulier de ρ_1 constant et égal à a,

$$(1) \qquad \rho_2 = -a,$$

$$(2) \qquad R_1 R_2 = a^2,$$

ρ_1 et R_1 étant les deux rayons de courbure de l'une des deux courbes, et ρ_2 et R_2 étant les rayons de courbure de l'autre courbe.

Or ces deux relations sont contenues, la première explicitement, la seconde implicitement, dans un Mémoire sur les courbes à double courbure, que j'ai adressé à l'Académie des Sciences en mai 1847, et qui est, depuis cette époque, entre les mains d'un membre de l'Institut. Voici comment j'ai obtenu la première.

Soit F une courbe plane. Si, par chacun de ses points, on élève des perpendiculaires au plan, on obtiendra un cylindre droit qui, de même que la courbe F se rapporte à son cercle osculateur, se rapportera au cylindre droit construit sur ce cercle. Ce cylindre circulaire droit sera donc osculateur de la surface cylindrique qui a la courbe F pour directrice.

Si l'on considère une surface conique quelconque, on pourra, par la même raison, regarder comme surface osculatrice de ce cône celle d'un cône circulaire droit ayant même centre.

Maintenant, deux éléments consécutifs de la surface des tangentes en un point quelconque (x, y, z) d'une courbe à double courbure FF', pouvant toujours être considérés comme appartenant à un cône circulaire droit dont le centre est le point (x, y, z), je me suis proposé de rechercher l'angle au centre de ce cône et la position de son axe.

Si l'on porte, à partir du point (x, y, z), sur les deux tangentes consécutives se coupant à ce point, une longueur égale à l'unité; et si, aux points ainsi déterminés, on mène deux parallèles à deux normales aux plans osculateurs consécutives, ces deux droites se couperont dans un plan perpendiculaire à la génératrice de la surface des tangentes, et détermineront l'élément d'une section conique dont l'équation sera

$$y_1^2 = mx_1 + nx_1^2,$$

cette section étant rapportée à son sommet de gauche comme origine des coordonnées x_1, y_1. Le rayon de courbure de cet élément, dont la longueur égale $\frac{1}{2}m$, sera dans un plan perpendiculaire au plan osculateur de la courbe FF', lequel plan passe par l'axe du cône cherché.

D'ailleurs l'équation d'une section conique, pour un cône dont l'angle au centre égale β, et faite perpendiculairement à une généra-

trice, à une distance du centre égale à l'unité, est

$$y_1^2 = \frac{\sin\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}x_1 - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\beta\right)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}x_1^2,$$

d'où

$$\frac{1}{2}m = \frac{\sin\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta;$$

et enfin

$$(3) \qquad dt = dt' \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta,$$

en appelant dt l'angle de contingence et dt' l'angle conique de torsion, ou l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, β se rapportant à la nappe de la surface des tangentes qui rencontre le plan des xy.

Tandis que l'équation

$$(4) \qquad \rho\, dt = ds,$$

où ds désigne la différentielle de l'arc, est l'équation de courbure circulaire, l'équation (3) est l'équation conique de la courbe FF'.

Le centre de cette dernière courbure se trouve évidemment sur l'axe du cône osculateur, qui est le lieu des centres de courbure de tous les points de la génératrice correspondante. Et le lieu de tous ces axes est ainsi le lieu des centres de courbure de tous les points de la surface des tangentes.

L'axe du cône osculateur est situé dans un plan perpendiculaire au plan osculateur, et du côté de la surface des tangentes par rapport au plan osculateur. L'angle $\frac{1}{2}\beta$, toujours aigu, sera positif quand la surface des tangentes sera intérieure à l'angle aigu formé par le plan osculateur au point (x, y, z) et le plan des xy; il sera négatif dans le cas contraire; dt' est de même signe que $\frac{1}{2}\beta$.

L'angle de cet axe avec le rayon de courbure est droit.

Arrivons à la formule (1).

Soit $F_1F'_1$ l'arête de rebroussement formée par les intersections des

plans normaux à la courbe FF'. Les tangentes de cette courbe sont toutes perpendiculaires aux plans osculateurs de la proposée et passent par le lieu de ses centres de courbure.

Considérons trois de ces tangentes consécutives, correspondantes au point (x, y, z) et aux trois points suivants. Les deux équations de courbure de cette arête seront

$$(5)\qquad \rho_1\, dt' = ds',$$

$$(6)\qquad dt' = dt \cot \tfrac{1}{2}\beta,$$

puisque l'angle de contingence dt de la courbe FF' devient l'angle conique de la courbe $F_1 F'_1$, et que, réciproquement, l'angle conique dt' de la première devient l'angle de contingence de la seconde.

Les rayons de courbure ρ et ρ_1 sont dans le plan normal à la courbe FF'. Ils sont parallèles comme perpendiculaires à la tangente de $F_1 F'_1$. De plus, il est facile de voir qu'ils sont dirigés en sens opposés.

L'axe du cône osculateur est ici dans un plan parallèle à celui de β, puisque ces deux plans sont perpendiculaires à un même plan normal de la courbe FF', lequel est osculateur de $F_1 F_1$. Son angle $\frac{1}{2}\beta'$ avec ce plan égale $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\beta$. Il est positif et négatif dans des circonstances analogues à celles qui déterminent le signe de $\frac{1}{2}\beta$. dt, considéré comme angle conique, est de même signe que $\frac{1}{2}\beta'$.

Soient (x_1, y_1, z_1) le point de l'arête $F_1 F'_1$ correspondant à celui (x, y, z) de la courbe FF', et m la distance de ce point au plan osculateur de FF', ou la partie de la tangente de $F_1 F'_1$ à ce point, interceptée par le plan osculateur; on aura

$$(7)\qquad m = \frac{d\rho}{dt'}.$$

Si l'on amène en coïncidence ce point avec le centre de courbure correspondant de la courbe FF', en faisant glisser parallèlement à elle-même la courbe $F_1 F'_1$ le long de sa tangente, on verra facile-

ment que, pour les deux cas de $\left[+\frac{1}{2}\beta,\ \pm\frac{1}{2}\beta'\right]$, correspondants à $[+dt',\ \pm d\rho]$, les surfaces des tangentes des deux courbes seront intérieures à l'angle droit des deux plans osculateurs tourné du côté du plan des xy; et que, pour les deux cas de $\left[-\frac{1}{2}\beta,\ \pm\frac{1}{2}\beta'\right]$, correspondants à $[-dt',\ \pm d\rho]$, ces deux surfaces seront extérienres à cet angle.

Les mêmes circonstances se produisent dans l'angle droit opposé au sommet à celui considéré, à cause de l'opposition de sens des secondes nappes des deux courbes.

Dans les deux premiers cas, les axes des cônes osculateurs sont parallèles et dirigés dans le même sens. Dans les deux derniers cas, ces axes sont parallèles et dirigés en sens contraires.

Donc, quelle que soit la valeur de m, les axes des cônes osculateurs des courbes FF', $F_1 F'_1$ sont parallèles.

Reprenons notre question.

On a, équation (7),

$$dm = ds' - \rho\, dt' = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t'}{dt'^2},$$

d'où

$$ds' = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t' + \rho\, dt'^3}{dt'^2} = \rho_1\, dt'; \tag{8}$$

et enfin

$$\rho_1 = \frac{dt'\, d^2\rho - d\rho\, d^2t' + \rho\, dt'^3}{dt'^3}; \tag{9}$$

relations où les inconnues de l'équation (5) se trouvent exprimées au moyen de ρ et de dt'.

Soit maintenant

$$\rho = a;$$

les équations (7), (8), (9) donneront

$$m = 0, \quad ds' = a\,dt', \quad \rho_1 = a;$$

les deux systèmes [(3), (4)], [(5), (6)] deviendront

$$\left[a\,dt = ds,\ dt = dt' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\right], \quad \left[a\,dt' = ds',\ dt' = dt \cot\tfrac{1}{2}\beta\right],$$

et l'arête de rebroussement $F_1 F'_1$ se confondra avec le lieu des centres de courbure de la courbe FF'. Les deux rayons de courbure se confondront aussi, et chacune des courbes FF' et $F_1 F'_1$ sera le lieu des centres de courbure de l'autre. C'est cette propriété qui m'a fait donner à ces courbes le nom de *courbes conjuguées*.

Deux courbes conjuguées sont les lieux des centres des sphères osculatrices l'une de l'autre. Elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre, et à une distance constante égale à a.

Toutes les hélices sont des courbes conjuguées avec les lieux respectifs de leurs centres de courbure. Les axes de leurs cônes osculateurs, qui sont les génératrices des cylindres sur lesquels elles sont tracées, sont parallèles et dirigés dans le même sens.

Quant à l'équation (2), comme dans les formules de M. Bertrand, relatives au cas de

$$\rho = a,$$

on a

$$R_1 = a \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta,$$

$$R_2 = a \cot \frac{1}{2} \beta;$$

il en résulte

$$R_1 R_2 = a^2.$$

Je dois dire, pour rendre hommage à la vérité, que la partie de cette Note concernant les signes de l'angle $\frac{1}{2}\beta$ est tirée d'une rédaction de mon Mémoire qui n'a pas été envoyée à l'Institut.

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES QUINZE PREMIERS VOLUMES;

SUIVIES

D'UNE TABLE GÉNÉRALE PAR NOMS D'AUTEUR.

ANNÉES 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849 ET 1850.

TOME Ier. (ANNÉE 1836.)

TOME II. (Année 1837.)

TOME III. (Année 1838.)

TOME IV. (Année 1839.)

TOME V. (Année 1840.)

TOME VI. (Année **1841**.)

TOME VII. (Année 1842.)

TOME VIII. (Année 1843.)

TOME IX. (Année 1844.)

TOME X. (Année 1845.)

TOME XI. (Année 1846.)

TOME XII. (Année 1847.)

TOME XIII. (ANNÉE 1848.)

TOME XIV. (Année 1849.)

TOME XV. (Année 1850.)

NOMS DES AUTEURS

qui ont inséré des Mémoires dans le

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,

Publié par M. J. LIOUVILLE,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes

Messieurs

ABRIA.
AIMÉ.
AMIOT.
AMPÈRE.
AOUST (l'abbé).

BERTRAND (J.).
BESGE.
BINET (J.).
BLANCHET (P.-H.).
BONNET.
BORCHARDT (C.-W.).
BOUQUET (J.).
BOURGOIN (L.).
BRASSINNE (E.).
BRAVAIS.
BRETON (Ph.).
BRETON (de Champ).
BRIANCHON.
BRIOT (C.).

CABART.
CALIGNY (A. de).
CAQUÉ.
CATALAN (E.).
CAUCHY (A.).
CAYLEY (A.).
CELLERIER.
CHASLES.
COMBES.
CORIOLIS.
COSTE.
COURNOT.

DARU.
DELAUNAY.
DESBOVES (A.-H.).
DIEU (Th.).
DONKIN (W.-J.).
DUHAMEL (J.-M.-C.).
DU HAYS.
DUPRÉ (Ath.).

EISENSTEIN.
ELLIS (R.-L.).

FAA DE BRUNO.
FAVRE-ROLLIN.
FERRIOT.
FINCK.

GALOIS (Év.).
GASCHEAU.
GAUSS.
GIULIO.
GOURNERIE (J. de la).
GRILLET.
GUERARD.
GUIBERT.
GUILLON (E.-L.).
HERMITE.
IVORY.
JACOBI (C.-G.-J.).
JELLETT (J.-H.).
JOACHIMSTHAL.
JOUBERT (C.).
KUMMER.

LAMARLE (E.).
LAMÉ.
LEBESGUE (V.-A.).
LEFORT (F.).
LEGER.
LEJEUNE-DIRICHLET.
LE VERRIER (U.-J.).
LIBRI.
LIOUVILLE (J.).
LOBATTO (R.).

MAC-CULLAGH.
MARRE (A.).
MINDING.
MIQUEL (Auguste).
MOIGNO (l'abbé).
MOLINS.
MONDESIR.
NEUMANN.
OLIVIER (Th.).
PAGES.
PHILLIPS (Ed.).
PLUCKER.
POINSOT.
POISSON.
POPOFF.
PUISEUX.

RAABE.
RICHELOT.
RISPAL (A.).
ROBERTS (M.).
ROBERTS (W.).
RODRIGUES (Ol.).
ROGER.

SAINT-VENANT.
SAINT-GUILHEM.
SARRUS.
SENARMONT (de).
SERRET (J.-A.).
SOUFFLET (l'abbé).
STEICHEN.
STEINER.
STERN.
STOUVENEL.
STURM.
SVANBERG (A.-F.).
TCHEBICHEF.
TERQUEM.
THOMSON (W.).
TRANSON.
VIEILLE.
VINCENT.
VOIZOT.
WANTZEL.

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEURS.

A

B

D

E

F

G

H

I

J

M

R

T

V

W

FIN DU QUINZIÈME VOLUME.